Maia. P.
193.t

8. Math. P. 193t

Guenther

2.V.

LEHRBUCH

DER

DETERMINANTEN-THEORIE

FÜR STUDIRENDE

VON

Dr. SIEGMUND GÜNTHER,

PRIVATDOCENT AM KGL. POLYTECHNIKUM ZU MÜNCHEN.

ERLANGEN 1875.

VERLAG VON EDUARD BESOLD.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Dem Andenken

Otto Hesse's

und

Herrn Professor Dr. Moritz Cantor

in dankbarer Erinnerung

an die

Heidelberger Studienzeit

gewidmet vom

Verfasser.

Vorwort.

Indem der Unterzeichnete ein neues Lehrbuch der Determinanten-Theorie der Oeffentlichkeit übergiebt, glaubt er Zweck und Stellung desselben zu ähnlichen Büchern scharf hervorheben zu müssen. Wir besitzen zur Zeit in Deutschland fast ausschliesslich solche Darstellungen dieses Wissenszweiges, welche das Bedürfniss des ersten Anfängers im Auge haben; hierher gehören ausser der an sich gewiss unübertrefflichen, für Lehrzwecke aber nach allgemeinem Urtheile nicht entsprechenden, Schrift von Hesse und der nur für die erste Einleitung berechneten von Reidt besonders die Lehrbücher von Dölp und Hattendorff, von denen letztres mit Recht sich weitrer Verbreitung erfreut. Auf der andren Seite steht ausser dem in manchem antiquirten Erstling Brioschi's vor Allem das meisterhaft angelegte Handbuch von Baltzer, für dessen Bedeutung gewiss hinlänglich die vierte Auflage spricht. Dasselbe ist jedoch eben ein Handbuch und muss als solches eine knappere Haltung annehmen, wie es bei Lehrbüchern erlaubt resp. geboten ist. Auch wird Jeder zugeben müssen, dass trotz der ungemeinen Eleganz dieser Darstellungsweise oder besser gesagt, gerade wegen derselben, ein erstes Studium des Werkes mit Schwierigkeiten zu kämpfen hat. Der Verfasser steht, wie diess auch seinerzeit eine Recension im 1. Bande der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Brioschi gegenüber richtig bemerkt hat, auf streng combinatorischem Boden, setzt also dabei eine Vorbildung voraus, wie sie den Studirenden, wenigstens in einem grossen Theile unsres Vaterlandes, nicht zu Theil wurde und werden wird.

Dem gegenüber ward hier beabsichtigt, einen Mittelweg einzuschlagen. Das Lehrbuch soll auf der einen Seite selbst dem Studenten des ersten Semersters gerecht werden, und zwar ward als Norm der mitzubringenden Kenntnisse, wenigstens für die ersten Kapitel, die bayrische Maturitäts-Prüfung angenommen, wozu nur noch der so leicht zu erwerbende Begriff des partiellen Differentialquotienten hinzuzutreten hätte. In Verfolgung dieses Grundgedankens musste die Behandlung des Stoffes möglichst einfach sich gestalten und musste man von den an sich ungleich

eleganteren Methoden der Combinationslehre völlig absehen; ebenso verstand es sich von selbst, dass die vorgetragenen Lehren sich durchweg an practische Beispiele anlehnten. Später, etwa vom 5. Kapitel ab, konnte die Darstellung an Kürze gewinnen, indem verschiedne für den Anfang unumgänglich nothwendige Mittelglieder wegfallen durften. Auch musste, wenn andernfalls eine vollständige Uebersicht der Determinantenlehre im Plane lag, späterhin ein grösseres Mass allgemein mathematischer Vorkenntnisse vorausgesetzt werden, so besonders bei den Functionaldeterminanten; indess wurde auch hier auf geeignete das richtige Verständniss erfahrungsmässig befördernde Beispiele noch stets Bedacht genommen. Mit Rücksicht auf die vorstehend erörterten Grundgedanken berührt sich unsre Schrift sehr nahe mit einer ähnlichen von Studnička, welche jedoch trotz mehrfacher Vorzüge sich ausserhalb ihres engeren Vaterlandes nur wenig Eingang verschafft zu haben scheint.

Neues zu bringen kann nicht eigentlich Aufgabe eines Buches sein, wie des vorliegenden. Andrerseits versteht es sich von selbst, dass jede gründliche Durcharbeitung eines Gegenstandes auch manche bisher noch nicht berührte Seite desselben wird erkennen lassen. So dürften besonders S. 20—23, S. 46—47, S. 87—88, S. 96—103 einige auch dem Sachkenner neue Bemerkungen darbieten. Insbesondre sei es erlaubt, auf den darin enthaltnen rein elementaren Beweis für das Cayley'sche Theorem hinzuweisen; eine kurze Notiz hierüber befindet sich bereits im Tageblatt der Breslauer Naturforscherversammlung. Die Kapitel 1, 4 und 6 finden sich überhaupt als solche noch in keinem bisher erschienenen Lehrbuche dieser Disciplin; für das erste war es im Ganzen und Grossen nur erforderlich, die zahllosen von Baltzer aufgefundenen Notizen zusammenzustellen. Die von der gewöhnlichen etwas abweichende Behandlung der cubischen Determinanten ist S. 118 zu motiviren versucht worden.

Dass in der Hauptsache nur deutsche Originalarbeiten citirt wurden, wird Billigung finden, indem so am leichtesten der Zweck, den Studirenden zur selbstständigen Quellen-Lecture hinzuleiten, erreicht werden möchte.

Habeas tua fata libelle.

München, im November 1874.

Dr. S. Günther.

Inhalt.

Kapitel I. Historische Skizze der Entwickelung des Determinantencalculs.

§. 1. Erste Anfänge. §. 2. Leibnitz. §. 3. Cramer; Euler's Kettenbruch-Algorithmen. §. 4. Bézout. §. 5. Vandermonde; Bezeichnung durch dreifache Indices. §. 6. Laplace. §. 7. Lagrange. §. 8. Die deutschen Combinatoriker; Rothe. §. 9. Gauss. §. 10. Cauchy und Binet; das Multiplicationstheorem.

Kapitel II. Allgemeine Eigenschaften der Determinanten.

§. 1. Begriff der Determinanten. §. 2. Gleichberechtigung der ersten und zweiten Indices. §. 3. Combinatorischer Hülfssatz. §. 4. Vertauschung zweier Reihen. §. 5. Vorbereitung für die Unterdeterminanten. §. 6. Allgemeine Vorzeichenregel bei Reihenvertauschungen. §. 7. Multiplication einer Determinante mit einer Zahl. §. 8. Zerfällung einer Determinante in Summen. §. 9. Satz von Studnička. §. 10. Zerlegung einer Determinante nach Elementen einer Reihe. §. 11. Anwendung auf ein Schachproblem. §. 12. Erste Unterdeterminanten. §. 13. Höhere Unterdeterminanten. §. 14. Fortsetzung. §. 15. Fortsetzung. §. 16. Entwickelung einer Determinante mit dem allgemeinen Diagonalelement ($a_{ii} + x$) in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe. §. 17. Jacobi's Satz über allgemeine Zerfällung einer Determinante. §. 18. Theorem von Laplace. §. 19. Anwendung auf ein Beispiel. §. 20. Multiplication zweier Determinanten. §. 21. Beispiel hiezu. §. 22. Multiplication beliebig vieler Determinanten. §. 23. Differential einer Determinante. §. 24. Fortsetzung. §. 25. Begriff der Matrix.

Kapitel III. Determinanten von besondrer Form.

§. 1. Das Differenzenproduct. §. 2. Erweiterung dieser Lehre. §. 3. Die Determinanten adjungirter Systeme. Hauptsatz von denselben. §. 4. Unterdeterminanten von adjungirten Determinanten. §. 5. Beispiel hiezu. §. 6. Symmetrische Determinanten. §. 7. Beispiel hiezu. §. 8. Orthosymmetrische Determinanten. §. 9. Sätze über dieselben. §. 10. Orthosymmetrische Determinanten aus Binomialcoëfficienten. §. 11. Doppelt-orthosymmetrische Determinanten. §. 12. Symmetrale Determinanten mit leerer Diagonale. §. 13. Halbdeterminanten. Spezieller Fall von solchen. §. 14. Symmetrale Determinanten mit voller Diagonale.

Kapitel IV. Cubische Determinanten.

§. 1. Begriff der cubischen Determinante. §. 2. Berechnungsmethode der einzelnen Glieder. §. 3. Vertauschung von Determinanten-Ebenen. §. 4.

Cubische Unterdeterminanten. §. 5. Zerfällung in Summen. §. 6. Analogon des Theorems von Laplace. §. 7. Allgemeines über Determinanten von höherem Rang.

Kapitel V. Die Eliminationsprobleme.

§. 1. Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen. §. 2. Spezielle Fälle. §. 3. Bedingung für die Coëxistenz homogener Gleichungen. §. 4. Hankel's Untersuchungen über complexe Zahlen. §. 5. Independente Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen. §. 6. Fürstenau's Verfahren zur Auflösung höherer Gleichungen. §. 7. Recurrirende Reihen. §. 8. Satz von Albert Girard. §. 9. Discriminanten. §. 10. Sylvester's dialytische Eliminationsmethode. §. 11. Elimination aus mehr als zwei Gleichungen. §. 12. Anwendungen. §. 13. Cayley's abkürzendes Verfahren. §. 14. Auflösung eines Systems von n Gleichungen, von denen (n — 1) linear, eine quadratisch.

Kapitel VI. Kettenbruchdeterminanten.

§. 1. Historisches; Hülfssatz. §. 2. Darstellung von Zähler und Nenner eines Kettenbruches in Determinanten-Form. §. 3. Bestimmung der Gliederzahl von Zähler und Nenner. § 4. Fundamentalsatz von den Kettenbrüchen. §. 5. Beweise verschiedener Kettenbruchsätze vermittelst Determinanten. §. 6. Eingliedrig-periodisch Kettenbrüche. §. 7. Verwandlung von Determinantenquotienten in Kettenbrüche. §. 8. Verwandlung von Kettenbrüchen in Reihen. §. 9. Fortsetzung. §. 10. Independente Ausdrücke für aufsteigende Kettenbrüche.

Kapitel VII. Geometrische Anwendungen.

§. 1. Determinante für den Dreiecksinhalt. §. 2. Herleitung dieses Ausdrucks nach Moebius. §. 3. Determinante für den Tetraëderinhalt. §. 4. Bauer's Methode zur Lösung des Hauptaxenproblems für Flächen zweiter Ordnung. §. 5. Durchschnitt eines Kegelschnittes mit einer Geraden.

Kapitel VIII. Functionaldeterminanten.

§. 1. Begriff der Functionaldeterminante bei entwickelt gegebenen Functionen. §. 2. Fortsetzung. §. 3. Verwickelte Functionen. §. 4. Transformation bestimmter Integrale. §. 5. Ableitung des Gauss'schen Krümmungsmasses nach Baltzer. §. 6. Das Krümmungsmass n facher Räume. §. 7. Hesse'sche Determinante. §. 8. Dieselbe für homogene Functionen. §. 9. Dieselbe als Inflexionsdeterminante. §. 10. Fortsetzung.

Kapitel IX. Lineare Substitutionen.

§. 1. Die linearen Transformationen im Allgemeinen. §. 2. Orthogonale Substitutionen. §. 3. In- und Covarianten. §. 4. Beispiele hiezu. §. 5. Weierstrass' Theorie der bilinearen Formen. §. 6. Anwendung auf die Lehre von den Linien-Complexen.

Kapitel I.

Historische Skizze der Entwickelung des Determinantencalculs.

§. 1. Die Erfindung der Buchstabenrechnung durch Vieta hatte die natürliche Folge, dass die Berechnung und Umformung verwickelter algebraischer Ausdrücke eine Lieblingsbeschäftigung der bedeutenderen Mathematiker jener Zeit wurde. Vornämlich trat diess Streben in den Anwendungen hervor, welche man von der jungen Wissenschaft auf geometrische Gegenstände zu machen liebte. Es sei hier nur beispielsweise erinnert an die schönen Untersuchungen über das Kreisviereck, welche Prätorius[1]) und Albert Girard[2]) anstellten, oder auch an den mühsamen Calcul, durch welchen Joachim Jungius den Radius der einer Pyramide umschriebenen Kugel zu bestimmen wusste, wenn deren 6 Kanten gegeben waren[3]). Bemühungen dieser und ähnlicher Art mussten natürlich an der ungeheuren Complicirtheit der Ausdrücke häufig scheitern, deren weitere Behandlung der Gang der Rechnung erforderte. Insbesondre aber musste diess eintreten, wenn durch die Aufgabe die explicite Darstellung einer unbekannten Grösse geboten war, welche durch ein System linearer Gleichungen mit andren Unbekannten verknüpft erschien.

Diese Möglichkeit machte sich insbesondre auch dem ersten Algebraisten seiner Zeit, Leibnitz, so fühlbar, dass er sich auf eine Abhülfe zu denken genöthigt sah. Sein Scharfblick erkannte bald, dass hier nur durch Einführung einer an sich willkürlichen symbolischen Bezeichnung geholfen werden könne, an der sich gewisse algebraische Operationen leicht vollziehen liessen. Wir dürfen uns über diesen Gedanken Leibnitz's nicht wundern, wenn wir nur im Auge behalten, dass das wissenschaftliche Hauptverdienst dieses Mannes, in der

richtigen und zweckmässigen Einführung solcher Bezeichnungsweisen lag, welche wir heutzutage Algorithmen zu nennen pflegen. So hat derselbe auch allein die Differentialrechnung geschaffen, indem keiner seiner Vorgänger und Zeitgenossen seine Ideen in dieser Weise zur Realisirung zu bringen wusste — eine historische Thatsache, welche auch besonders der Darstellung in einem neueren ausgezeichneten Werke [4]) gegenüber, nicht scharf genug hervorgehoben werden kann. So hat Leibnitz ferner, wenn Grassmann [5]) in diesem Punkte seine Conceptionen richtig erfasst hat, an einen für geometrische Zwecke brauchbaren Algorithmus gedacht, von dessen Verwendbarkeit die „Ausdehnungslehre“ des letztren wohl genügend Zeugniss ablegt. Und der nämliche schöpferische Geist, welcher in den hier genannten Disciplinen reformirend auftrat, macht sich auch in dem uns hier vorzüglich interessirenden Punkte geltend.

§. 2. Die Buchstabenrechnung war gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts ein Gegenstand des Stolzes für alle Mathematiker geworden, welche auf die Allgemeingültigkeit ihrer Resultate Werth legten. Man wird deshalb das Erstaunen eines De l'Hopital nur begreiflich finden können, als Leibnitz ihm [6]) mittheilte, dass er sich in neuerer Zeit wieder mehrfach der Zahlen statt der Buchstaben bediene, und indem er diese erstren doch wie Buchstabengrössen behandle, manches Neue und Interessante gefunden habe. Es ist natürlich, dass der französische Gelehrte aus dieser kurzen Notiz nicht viel zu machen wusste und in seinem Antwortschreiben einige Bedenken äusserte [7]). Hiedurch sah sich denn Leibnitz genöthigt, nochmals diesen Gegenstand aufzunehmen und De l'Hopital sein neues Princip genauer auseinanderzusetzen.

Er benützt hiezu ein Beispiel. Gegeben sind die drei Gleichungen

$$10 + 11\,x + 12\,y = 0$$
$$20 + 21\,x + 22\,y = 0$$
$$30 + 31\,x + 32\,y = 0,$$

und zwar sollen die hier auftretenden Zahlformen nicht etwa Zahlen des dekadischen Systemes sein, sondern es soll vielmehr die erste Ziffer jedes solchen zweisylbigen Gebildes den Platz der Gleichung und die zweite den Platz in der Gleichung bezeichnen, mit andren Worten, wir haben hier das erste Beispiel der uns jetzt so geläufig gewordenen Bezeichnungsweise durch doppelte Indices.

Die drei obigen Gleichungen werden nun ganz so einem Elimi-

nationsprocesse unterworfen, als ob die darin vorkommenden Symbole wirkliche Zahlen wären, so dass man sofort auf folgende beiden Gleichungen:

$$10.22 - 12.20 + 11.22\,x - 12.21\,x = 0$$
$$10.32 - 12.30 + 11.32\,x - 12.31\,x = 0$$

gelangt, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass jede dritte Ziffer jedes einzelnen Ausdrucks der ersten Gleichung in der zweiten durch die nächsthöhere ersetzt ist. Indem nun ferner Leibnitz durch ein analoges Verfahren aus dem letzten Systeme x wegschafft, gelangt er zu einer Schlussrelation, die er, streng consequent, so schreiben müsste:

$$10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30,$$

welche er aber, wiederum geleitet durch sein Bestreben zu vereinfachen, in dieser Weise darstellt:

$$\begin{matrix} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \cdot \\ 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0 \end{matrix}$$

Interessant ist auch die Bemerkung Leibnitz's, dass diese Finalgleichung durch ihre allenthalben sich geltend machende „Harmonie“ ihre Richtigkeit von selbst darthue, und dass diese Harmonie bei Anwendung von Buchstaben bei weitem nicht so deutlich hervortrete, zumal bei einer grösseren Anzahl von Gleichungen. In Verfolgung dieses Gegenstandes, bemerkt er weiter, habe er folgendes für jedes beliebige System „einfacher“, d. h. linearer Gleichungen geltende Gesetz gefunden [8]): „Datis aequationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quae simplicem gradum non egrediuntur, pro aequatione prodeunte, primo sumendae sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscujusque aequationis; secundo, eae combinationes opposita habent signa, sed in eodem aequationis prodeuntis latere ponantur, quae habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; cetera habent eadem signa.“

In diesem Theorem ist allerdings bereits mit Klarheit das eigentliche Wesen der Determinanten dargelegt, besonders auch die fundamentale Bestimmung, dass die Determinante keine zwei Terme aus der nämlichen Horizontal- oder Vertikalreihe enthalten dürfe. Leibnitz geht sogar noch weiter und deutet die Verwendung seines

neuen combinatorischen Symbols auch für das allgemeinere Eliminationsproblem an, ohne jedoch über einige allgemeine Bemerkungen hinauszugehen. Ein spezieller Name für die neue Erfindung findet sich noch nicht; dieselbe wird mit unter der allgemeinen Bezeichnung „characteristiques“ begriffen.

De l'Hopital erkennt in seinem Antwortschreiben die Vorzüglichkeit der neuen Idee in unbestimmten Ausdrücken an, ohne jedoch sich tiefer auf die Sache einzulassen; für ihn musste dieselbe, auch nach den Erklärungen seines Correspondenten, etwas sehr Fremdartiges behalten. Auch Leibnitz erwähnt des Gegenstandes nicht mehr, indem seine historischen Untersuchungen, wie auch seine vielen gelehrten Streitigkeiten seine ganze Aufmerksamkeit absorbiren mochten; nur einmal erklärt er noch, dass er seine Erfindung für eine der schönsten in der Analysis halte [9]).

Die Geschichtschreiber der Mathematik, wenn sie überhaupt, wie Bossut [10]) diesen Gegenstand berührten, scheinen von dieser Stelle nichts zu wissen; dieselbe ward, nach Baltzer's Angabe erst durch Lejeune-Dirichlet [11]) bemerkt und in ihrer hohen geschichtlichen Bedeutung erkannt.

§. 3. Die zweite und in ihren Folgen bei weitem wichtigere Erfindung der Determinanten verdanken wir Cramer, dessen berühmtes Werk [12]) so manchen interessanten Wink enthält, den erst die Neuzeit richtig auszunützen verstand. Es sei in dieser Beziehung nur erinnert an jene dem Newton'schen Parallelogramm nachgebildete Regel zur Discussion der in einem vielfachen Punkte zusammenlaufenden Curvenäste, welche von Puiseux [13]) wieder reproducirt und auf höchst glückliche Weise mit der Theorie der mehrblättrigen Riemann'schen Flächen in Verbindung gesetzt wurde.

Bei Behandlung der Aufgabe, durch

$$\frac{1}{2}\,v^2 + \frac{3}{2}\,v$$

Punkte eine Curve der $v$ten Ordnung zu legen, kommt es selbstverständlich auf die Auflösung eines Systems von ebensoviel linearen Gleichungen an, und Cramer [14]) zeigt nun, dass diese Operation schon bei einem durch 5 Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitte eine höchst mühsame und zeitraubende ist. Diese Operation zweckmässig zu vereinfachen, ist Cramer's in einer Note [15]) näher charakterisirte Absicht.

Er bildet demnach ein System linearer Gleichungen, und zwar

ist hiebei auf den Umstand aufmerksam zu machen, dass die Coefficienten dieser Gleichungen bezüglich durch

$$x^1,\ y^2,\ z^3\ \ldots$$

bezeichnet werden, und ausdrücklich vor einer Verwechslung dieser Symbole mit wirklichen Potenzen gewarnt wird. Durch einfachen Inductionsschluss, gestützt auf die wirklich ausgerechneten Werthe der in drei linearen Gleichungen vorkommenden Unbekannten, erhebt sich hierauf Cramer zu einer allgemeinen Auflösungsmethode, die er folgendermassen schildert.

Der allen n Unbekannten gemeinsame Nenner hat ebensoviele Glieder, als es Permutationen von n giebt. Um jedes einzelne Glied zu erhalten, schreibe man die Unbekannten, stets in der nämlichen Reihenfolge, nacheinander hin und setze ihnen die n ersten Ziffern, in jeder denkbaren Weise geordnet, als Exponenten (bezüglich Indices) bei. Die Hälfte der so erhaltenen Ausdrücke ist positiv, die andre negativ; um sich über das einem bestimmten Gliede zukommende Vorzeichen zu vergewissern, zähle man die darin vorkommenden Inversionen ab; einer geraden Anzahl kommt das Vorzeichen +, einer ungeraden das Vorzeichen — zu. Eine solche Inversion („dérangement“) tritt aber dann ein, wenn ein im dekadischen Zahlensysteme höher stehender Index seine Stelle links von einem niedrigeren einnimmt. So kommt den Gliedern

$$z^1y^2v^3,\ z^3y^1x^2,$$

welche bezüglich 0 und 2 Inversionen aufweisen, das positive Zeichen zu. Um aus dem Nenner den Zähler für irgend eine Unbekannte zu finden, hat man nur deren Coëfficienten resp. durch die bekannten Grössen zu ersetzen.

Cramer macht auch auf die Ausnahmsfälle aufmerksam, welchen diese Lösung unterliegt. So kann der Nenner beispielsweise Null werden; verschwinden dann auch die Zähler, so nimmt jede Unbekannte den Werth

$$\frac{0}{0}$$

an, und das Problem ist unbestimmt. Behaupten jedoch die Zähler endliche Werthe, so ist eine eigentliche Lösung nicht mehr möglich, d. h. die den Gleichungen Genüge leistenden Werthe der Unbekannten werden unendlich gross, wie diess Cramer [15]) an einem Beispiele ausführlich darthut.

Wir sehen hier die Lehre von den Determinanten bereits auf

einem verhältnissmässig hohen Standpunkte; insbesondre muss auf den eleganten Modus hingewiesen werden, durch welchen Cramer die Vorzeichen bestimmt; derselbe hat auch spätren Geometern, vornämlich aus der combinatorischen Schule, Stoff zu interessanten Betrachtungen gegeben. Dagegen betrachtet Cramer seine Erfindung offenbar mehr nur als ein angenehmes Erleichterungsmittel algebraischer Rechnungen und erkennt derselben nicht die principielle Bedeutung zu, welche Leibnitz (s. o. §. 2) ihr unterlegte, und die ihr auch wirklich innewohnt.

§. 4. Der grosse Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, Leonhard Euler, scheint von diesen Bemühungen seines Zeitgenossen und Landsmannes Cramer keine Kenntniss gehabt und überhaupt das neue Verfahren vollständig ignorirt zu haben, obwohl in seine spätren Lebensjahre die Arbeiten Bézout's fallen, welcher, wie wir bald näher sehen werden, von demselben einen so wichtigen Gebrauch zu machen verstand. Gleichwohl konnte auch er den Zeitumständen, welche gebieterisch die Einführung und Aufnahme dieses analytischen Instrumentes erforderten, so wenig sich entziehen, dass er vielmehr selbst einen neuen Algorithmus in's Leben rief, der eigentlich nur ein versteckter Determinanten-Calcul ist. Um nämlich den Unbequemlichkeiten zu entgehen, welche die Rechnung mit den in entwickelter Gestalt so wenig übersichtlichen Näherungswerthen von Kettenbrüchen mit sich brachten, drückte er den Werth des Kettenbruches

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots + \frac{1}{m}$$

folgendergestalt durch ein Symbol aus:

$$\frac{(a,\ b,\ c,\ d\ \ldots\ m)}{(b,\ c,\ d\ \ldots\ m)}.$$

Mit der blossen Einführung dieser neuen Bezeichnungsart wäre natürlich an sich wenig gewonnen gewesen; Euler that jedoch auch den nöthigen Schritt, um die an sich gleichgültige Form zu beleben und stellte [16]) eine Reihe von Regeln auf, um mit diesen Symbolen wirklich operiren, d. h. rechnen zu können. Diese Regeln sind nun genau die nämlichen, mittelst deren wir gegenwärtig eine Determinante nach den Elementen einer bestimmten Reihe in Unterdeterminanten zerlegen. Besonders instruktiv ist in dieser Hinsicht der

Beweis, welchen Euler [17]) für den Fundamentalsatz der Kettenbruchslehre

$$-(p_{n-1}\,q_n - p_n\,q_{n-2}) = p_{n-2}\,q_{n-1} - p_{n-1}\,q_{n-2}$$

giebt, unter p_n und q_n bezüglich den Zähler des nten Näherungswerthes eines Kettenbruches von der obigen Form verstanden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&(a, b, c \ldots p, q)\,(b, c \ldots p, q, r) - (b, c \ldots p, q)\,(a, b, c \ldots p, q, r)\\
&= (a, b, c \ldots p, q)\,r\,(b, c \ldots q, q) + (a, b, c \ldots p, q)\,(b, c \ldots p)\\
&- (b, c \ldots p, q)\,r\,(a, b, c \ldots p, q) - (b, c \ldots p, q)\,(a, b, c \ldots p)\\
&= -[(a, b, c \ldots p)\,(b, c \ldots p, q) - (b, c \ldots p)\,(a, b, c \ldots p, q)],
\end{aligned}$$

und hiemit ist der Satz bewiesen. Dass der Beweis dieses Satzes durch wirkliche Determinanten sich ganz analog gestaltet, ist an einem andren Orte gezeigt worden [18]), und wir dürfen mit Rücksicht hierauf wohl behaupten, dass Euler, obwohl er die eigentliche Determinantenrechnung nicht kannte, trotzdem, gewissermassen instinktiv, die Nothwendigkeit eines solchen Hülfsmittels richtig erfasste. Auch hat er sich seines neuen Algorithmus bei verschiednen Problemen der Zahlentheorie mit Vortheil bedient [19]). In diesem Gesichtspunkte haben auch einige der bedeutendsten Mathematiker unsrer Zeit, wie Gauss [20]) und Lejeune-Dirichlet [21]), ihn wieder aufgenommen; jedoch tritt, besonders bei erstrem, der Charakter eines Algorithmus gegen den einer bequemen Bezeichnungsweise, zurück.

Erkennt man, wie diess die historische Entwickelung fordert, die Determinantenrechnung als einen Ausfluss der sogenannten combinatorischen Analysis an, so wird man sich mit dem Ausspruche Hindenburg's [22]) einverstanden erklären müssen, dass das eigentliche Gesetz dieser Symbole in Euler's „wirklich combinatorischer Auflösung“ bereits implicite enthalten sei.

§. 4. Auch in einem andren Problem, welches Euler mit Vorliebe behandelte, hätte sich der Nutzen der Determinanten sehr augenfällig herausgestellt, wenn er denselben in seiner Wichtigkeit erfasst gehabt hätte, nämlich in dem allgemeinen Eliminationsproblem. Euler gab allerdings eine Methode, welche sich durch hohe Eleganz auszeichnet [23]), gleichwohl aber noch mit mancherlei Nachtheilen behaftet ist, besonders auch mit dem, dass man nicht a priori den Grad der durch die Elimination resultirenden Gleichung zu erkennen im Stande ist. Ferner lässt diess Verfahren sich bloss auf zwei Gleichungen anwenden und versagt, wenn deren mehrere mit einer grössren

Anzahl von unbekannten Grössen vorliegen, und schliesslich sind die vorzunehmenden Rechnungen von der Art, dass sie selbst „le calculateur le plus intrépide“ nach Bézout's Aeusserung zu entmuthigen vermögen. Um diesen Mängeln abzuhelfen, griff nun der eben genannte Mathematiker auf den genialen Gedanken Cramer's zurück und stellte sich die Aufgabe, den ganzen weitläufigen Eliminationsprozess ausschliesslich auf die Auflösung linearer Gleichungen zurückzuführen.

Zu diesem Zweck stellt er [24]) zunächst einen Hülfssatz auf, welcher seiner naturgemässen Stellung nach eigentlich ein Corollar der oben (§. 2) skizzirten Cramer'schen Auflösungsmethode sein würde, hier aber einen selbstständigen Platz einnimmt. Sind nämlich n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben von der Beschaffenheit, dass die constanten Grössen sämmtlich durch Nullen ersetzt sind, so muss nothwendig eine Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten bestehen, indem ja eigentlich n Gleichungen mit den (n — 1) Unbekannten

$$\frac{x_1}{x_n}, \quad \frac{x_2}{x_n} \quad . \quad . \quad . \quad \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

vorliegen. Bezout giebt nun dieser Bedingung folgende Formulirung, wenn wir unsre Ausdrucksweise dabei anwenden: Man bilde die Determinante der n Coëfficienten und setze dieselbe gleich Null.

Zur Bildung der Determinanten, deren symbolische Darstellung ihm noch abgeht, giebt er eine Regel, welche zur wirklichen Auswerthung eines solchen Ausdrucks sich auch jetzt noch als sehr praktisch erweisen dürfte, und die wir daher an einem Beispiele etwas ausführlicher darstellen wollen.

Es mögen gegeben sein die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \end{aligned}$$

und es sei bekannt, dass die Bedingung für das gemeinschaftliche Bestehen derselben durch folgende Relation unter den Coefficienten

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba = 0$$

ausgedrückt sei. Um dann die analoge Bedingung für die vier simultanen Gleichungen

$$\begin{aligned} ax &+ by &+ cy &+ dt &= 0 \\ a'x &+ b'y &+ c'z &+ d't &= 0 \\ a''x &+ b''y &+ c''z &+ d''t &= 0 \\ a'''x &+ b'''y &+ c'''z &+ d'''t &= 0 \end{aligned}$$

zu erhalten, setze man jedem der obigen 6 Glieder zunächst ein d als vierten Faktor bei, ertheile demselben jeden Platz, während die drei andren Elemente ihre lexikographische Anordnung beibehalten, und ertheile den so entstehenden Produkten abwechselnd das positive und negative Vorzeichen. So erhält man, indem man zunächst noch von den Indices absieht, die nachstehende Gleichung

$$\begin{aligned} &abcd - abdc + adbc - dabc - acbd + acdb - adcb + dacb \\ &+ cabd - cadb + cdab - dcab - bacd + badc - bdac + dbac \\ &+ bcad - bcda + bdca - dbca - cbad + cbda - cdba \\ &+ dcba = 0. \end{aligned}$$

Um nun noch jedes einzelne Glied mit den nöthigen Indices zu versehen, giebt Bézout [25]) folgende Anweisung: „Alors conservez les lettres qui occupent la première place; donnez à celles qui occupent la seconde, la même marque qu'elles ont dans la seconde équation; à celles qui occupent la troisème, la même marque qu'elles ont dans la troisième équation, et ainsi de suite, égalez enfin le tout à zéro et vous aurez l'équation de condition cherchée."

Verhalten wir uns dieser Regel gemäss, so nimmt unsre Bedingungsgleichung schliesslich folgende Form an:

$$\begin{aligned} &ab'c''d''' - ab'd''c''' + ad'b''c''' - da'b''c''' - ac'b''d''' + ac'd''b''' \\ &- ad'c''b''' + da'c''b''' + ca'b''d''' - ca'd''b''' + cd'a''b''' \\ &- dc'a''b''' - ba'c''d''' + ba'd''c''' - bd'a''c''' + db'a''c''' \\ &+ bc'a''d''' - bc'd''a''' + bd'c''a''' - db'c''a''' - cb'a''d''' \\ &+ cb'd''a''' - cd'b''a''' + dc'b''a''' = 0. \end{aligned}$$

Die hier durchgeführte Bestimmungsweise ist, wie man sieht, die nämliche, welche wir heutzutage als Zerlegung einer Determinante in Unterdeterminanten zu bezeichnen pflegen, und zugleich die bequemste, um auf recurrentem Wege zur Kenntniss der entwickelten Glieder einer Determinante zu gelangen. Jedoch ist auch der Weg zu einer independenten Auffindung derselben darin bereits angedeutet; denn um zu der obigen Gleichung

$$abc - bea + cba - bac + bca - cba = 0$$

zu gelangen, wird bereits darauf aufmerksam gemacht [26]), dass eine Vertauschung einer ungeraden Anzahl von Buchstaben das negative,

die einer geraden das positive Vorzeichen erfordere. Ferner ist es ersichtlich, dass diese Methode sofort erkennen lässt, aus wie vielen Gliedern die Entwickelung einer Determinante bestehe.

Indem dann Bézout an seine eigentliche Aufgabe geht, betrachtet er ein System von n Gleichungen beliebigen Grades, welche nach absteigenden Potenzen einer Unbekannten geordnet sind, während die scheinbar constanten Coëfficienten wieder Funktionen von (n — 1) andren Unbekannten vorstellen. Das allgemeine Problem lässt sich reduciren auf das speziellere, aus zwei Gleichungen die gemeinschaftliche Unbekannte zu eliminiren oder, was dasselbe ist, die Bedingung anzugeben, welche zwischen den Coëfficienten stattfinden muss, damit den beiden Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel zukomme.

Der Grundgedanke Bézout's ist nun der, dass er jede von beiden Gleichungen solange mit x multiplicirt, bis ein System von (p + q) Gleichungen vorliegt, wenn p und q bezüglich die Grade der beiden ursprünglichen Gleichungen waren. Nunmehr betrachtet er die einzelnen Potenzen der unbekannten Grösse als neue Unbekannte und sucht die Bedingung dafür, dass diese sämmtlich linearen Gleichungen zusammen bestehen. Dem bewiesnen Lemma zufolge wird aber diese gefunden, wenn man die Coëfficienten dieser Gleichungen zu einer Determinante vom (p + q)ten Grade zusammenstellt und dieselbe gleich Null setzt.

Recapituliren wir also die Verdienste, die sich Bézout um die Ausbildung des eigentlichen Determinantencalculs erworben hat, so sind es besonders zwei: die Angabe einer bequemen Regel zur Bildung solcher Ausdrücke und die Erweiterung des Cramer'schen Verfahrens auf verwickelte Eliminationen. An ein Rechnen mit Determinanten war dagegen noch nicht zu denken, so lange es noch an einer concisen symbolischen Bezeichnung fehlte.

§. 5. Gehen wir nun zu den Männern über, welche diese Bezeichnung und damit auch die Determinanten-Rechnung in's Leben riefen. Auf diese Erfindung und Einführung eines passenden Algorithmus kann von Seite des Historikers nicht genug Gewicht gelegt werden; was vor dieser Epoche geschaffen ward, steht, und sei es noch so sehr der Ausfluss einer genialen Idee, gleichwohl als unvermittelter sinnreicher Einfall isolirt da, ja es kann vorkommen, dass andre Erfinder auf die nämlichen Formen gerathen, ohne die Identität beider zu erkennen. Einen solchen Fall haben wir oben (§. 3) bei

L. Euler kennen gelernt, und ganz kürzlich erst [27]) hat Hankel daran erinnert, dass Daniel Bernoulli, indem er die algebraischen Gleichungen durch recurrirende Gleichungen aufzulösen suchte, die hierbei auftretenden Coëfficienten durch analytische Gebilde darstellte, welche sich bei genauerem Zusehen als sogenannte orthosymmetrische Determinanten erwiesen.

Den ersten Schritt zu einer selbstständigen Bezeichnungsweise that Vandermonde in einem Aufsatze [28]), über welchen er bereits im Jahre 1771 der Pariser Academie der Wissenschaften Bericht erstattete, welcher aber erst im folgenden Jahre in deren Denkschriften erschien. Zu diesem Zwecke legt er consequent die Idee zu Grunde, zwei verschiedene Grössen nicht mehr, wie diess bis dahin die Algebra that, durch verschiedene Buchstaben, sondern vielmehr durch einen oberen und unteren Index zu unterscheiden — eine Idee, die, wie wir (§. 1) sahen, sich bereits von Leibnitz herschreibt. Dass er dabei den Träger der Indices vollkommen unterdrückt und einen allgemeinen Term nicht wie wir,

$$a_{ik} \equiv a^{i}_{k}$$

sondern blos

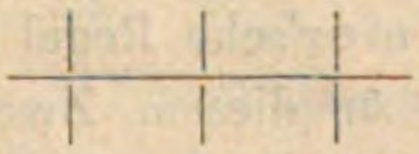
$$i \equiv \begin{matrix} ik \\ k \end{matrix}$$

nennt, bleibt in der Hauptsache gleichgültig.

Hierauf macht Vandermonde folgende Festsetzung. Es ist [29])

$$\frac{\alpha \mid \beta}{a \mid b} = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ a & . & b \end{matrix} - \begin{matrix} \alpha & \beta \\ b & . & a \end{matrix} = 11 \,.\, 22 - 12 \,.\, 21,$$

und giebt unmittelbar im Anschluss hieran eine Vorschrift, eine Determinante nten Grades durch Zerlegung in Minoren auf solche des (n — 1)ten zurückzuführen. Es sei beispielsweise die Reduction einer Determinante fünften Grades in Vandermonde's Zeichensprache (le symbole



sert ici de caractéristique) hier durchgeführt [30]). Man hat

$$\frac{\alpha \mid \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon}{a \mid b \mid c \mid d \mid e} = \begin{matrix} \alpha\ \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon \\ a.b \mid c \mid d \mid e \end{matrix} + \begin{matrix} \alpha\ \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon \\ b.c \mid d \mid e \mid a \end{matrix} + \begin{matrix} \alpha\ \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon \\ c.d \mid e \mid a \mid b \end{matrix}$$

$$+ \begin{matrix} \alpha\ \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon \\ d.e \mid a \mid b \mid c \end{matrix} + \begin{matrix} \alpha \\ e \end{matrix} \cdot \frac{\beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon}{a \mid b \mid c \mid d},$$

oder in unsren Zeichen

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{vmatrix} = 55. \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - 45. \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{vmatrix}$$

$$+ 35. \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{vmatrix} - 25. \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{vmatrix} + 15. \begin{vmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{vmatrix}.$$

Wie man sieht, ist hier der Ausgangspunkt für die ganze Behandlungsweise ein wesentlich anderer, als bei den bisher erwähnten Autoren; während bei diesen ausnahmslos der Entwicklungsgang die Discussion gewisser analytischer Formen fordert, für welche sich alsdann bestimmte Gesetze aufstellen lassen, stellt Vandermonde umgekehrt diese Formen gewissermassen als willkürliche Symbole hin und definirt dieselben näher durch eine fundamentale Beziehung, welche jedes solche Symbol von höherem Grade mit andren von geringerem verbindet. Erst dann wird gezeigt, warum diese Symbole und gerade nur diese einzuführen waren. Die systematische Behandlung unsrer Disciplin hat aus diesem Verfahren Vandermonde's wesentlichen Vortheil gezogen, umsomehr, als durch dasselbe die Formulirung gewisser Fundamentalsätze der Determinantentheorie geradezu geboten erscheinen muss.

Es wird nämlich darauf hingewiesen, dass aus jedem Symbole die einzelnen Glieder auch dadurch erhalten werden könnten, dass man das Glied 11 22 33 . . . nn bildet, die ersten Indices stehen lässt und die zweiten willkürlich pennutirt. Dann bedarf es aber noch einer Festsetzung über das Vorzeichen jedes einzelnen Gliedes, und die hiezu dienende Regel darf natürlich nicht mehr willkürlich gegeben werden, indem dieselbe sonst mit der früher gegebenen Definition der Determinanten in Widerspruch stehen könnte. Es tritt demnach an Vandermonde die Nothwendigkeit heran, die oben (§. 2) genannte Cramer'sche Regel als direkten Ausfluss jener Definition darzuthun, und zu diesem Zwecke sucht er die beiden Relationen

$$\frac{1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid m \mid m+1 \mid \ldots \mid n}{1 \mid 2 \mid 3 \mid \ldots \mid m \mid m+1 \mid \ldots \mid n}$$

$$= \pm \frac{1 \mid 2 \mid 2 \mid \ldots \mid n-m+1 \mid n-m+2 \mid \ldots \mid n}{m \mid m+1 \mid m+2 \mid \ldots \mid n \mid 1 \mid \ldots \mid n-1}$$

und

$$= -\frac{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & \ldots & m & m+1 & \ldots & n \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & \ldots & m & m+1 & \ldots & n \\ \hline\end{array}}$$

$$= -\frac{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & \ldots & m-1 & m & m+1 & \ldots & n \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & & m-1 & m+1 & m & \ldots & n \\ \hline\end{array}}$$

zu erweisen. In unsrer Sprache würde diess heissen, dass das Vertauschen zweier horizontalen oder vertikalen Reihen einen Zeichenwechsel der Determinante involvire. Der Beweis dieses wichtigen Theorems wird nicht allgemein geführt, dasselbe vielmehr nur durch die sogenannte unvollständige Induktion plausibel zu machen gesucht. Als Corollar findet sich dann auch die Thatsache, dass jede Determinante mit zwei oder mehr gleichen Reihen identisch verschwindet.

Nach diesen Vorbereitungen wird die Bestimmung einer beliebigen Unbekannten aus einem Systeme linearer Gleichungen ganz in der Weise gelehrt, wie wir diess noch gegenwärtig zu thun pflegen; z. B. aus den beiden Gleichungen

$$1^1\,\xi_1 + 2^1\,\xi_2 + 3^1 = 0$$
$$1^2\,\xi_1 + 2^2\,\xi_2 + 3^2 = 0$$

folgen die Werthe der Unbekannten

$$\xi_1 = \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}}, \quad \xi_2 = \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}}.$$

Als ein, wenn auch geringfügig scheinender, so doch in seinen Wirkungen erheblicher Fortschritt in der mathematischen Bezeichnungsweise muss auch die Neuerung hervorgehoben werden, die verschiedenen Unbekannten nicht mehr durch die Schlussbuchstaben des Alphabets, sondern durch dem Terme x oder y unten angehängte Indices zu charakterisiren. Jetzt erst war es möglich, die allgemeinen Formeln zur Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen zu geben, wie diess denn auch zuerst von Vandermonde [30]) geleistet worden ist.

Die Anwendungen, welche Vandermonde weiterhin von seiner Ausdrucksweise auf andre Eliminationsaufgaben macht, interessiren uns hier weniger, insoferne darin zur eigentlichen Determinantentheorie Gehöriges nicht mehr dargeboten wird. Nur Eine höchst wichtige Bemerkung wird unten (§. 6) im Zusammenhange mit andren Sätzen registrirt werden. Seiner Aussage [31]) zufolge hat de Gua dieselben Probleme in einer der seinigen ähnlichen Weise behandelt und ist zu analogen Resultaten gelangt.

Die Gerechtigkeit verlangt es, dass wir auch noch einer andren Idee Vandermonde's hier Erwähnung thun, welche, wenn auch nicht unmittelbar, so doch in der Folgezeit für die Lehre von den Determinanten sich fruchtbar erwiesen hat. Italienische Mathematiker haben in neuester Zeit als Erweiterung der gewöhnlichen sogenannte cubische Determinanten gebildet und sind dabei, anscheinend von einem völlig neuen Gedanken geleitet, von Zahlen mit dreifachem Index ausgegangen. Diess hat aber bereits Vandermonde[32]) gethan, als er sich anschickte, das sogenannte Rösselsprungproblem auf drei Dimensionen auszudehnen. Er bildet zu diesem Zwecke 64 Glieder, die, geeignet angeordnet, die Elemente einer cubischen Determinante vom Grade

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

repräsentiren würden:

$$\begin{array}{cccccccc}
4^3{}_1 & 4^3{}_3 & 3^1{}_2 & 1^1{}_1 & 1^2{}_3 & 1^4{}_2 & 2^4{}_4 & 3^2{}_4 \\
4^3{}_4 & 3^3{}_2 & 3^1{}_3 & 1^1{}_4 & 1^2{}_2 & 1^4{}_3 & 2^4{}_1 & 3^2{}_1 \\
4^2{}_1 & 3^2{}_3 & 3^4{}_2 & 1^4{}_1 & 1^3{}_3 & 1^1{}_2 & 2^1{}_4 & 3^3{}_4 \\
1^3{}_1 & 2^3{}_3 & 2^1{}_2 & 4^1{}_1 & 4^2{}_3 & 4^4{}_2 & 3^4{}_4 & 2^2{}_4 \\
4^2{}_4 & 3^2{}_2 & 3^4{}_3 & 1^4{}_4 & 1^3{}_2 & 1^1{}_3 & 2^1{}_1 & 3^3{}_1 \\
1^3{}_4 & 2^3{}_2 & 1^1{}_3 & 4^1{}_4 & 4^2{}_2 & 4^4{}_3 & 3^4{}_1 & 2^2{}_1 \\
1^2{}_1 & 2^2{}_3 & 2^4{}_2 & 4^4{}_1 & 4^3{}_3 & 4^1{}_2 & 3^1{}_4 & 2^3{}_4 \\
1^2{}_4 & 2^2{}_2 & 2^4{}_3 & 4^4{}_4 & 4^3{}_2 & 4^1{}_3 & 3^1{}_1 & 2^3{}_1.
\end{array}$$

Zur bessern Uebersicht giebt er auch eine perspektivische Zeichnung des zugehörigen Würfels, wie wir diess im vierten Kapitel ausführlicher zeigen werden.

§. 6. Ziemlich zur nämlichen Zeit, wie Vandermonde, nahm auch Laplace die Lehre von den Determinanten in Angriff. Seine Beweggründe hiezu waren rein praktischer Natur; als es sich bei einem Problem aus der Theorie der Differentialgleichungen um Auflösung eines Systems linearer Gleichungen handelt, erinnert er sich der Cramer'schen Methode[33]), bemerkt, dass dieselbe noch eines allgemeinen Beweises entbehre, und liefert so, indem er diesen zu leisten unternimmt, als Schaltkapitel einen elementaren Abriss der Determinantentheorie.

Um zur Bildung der Glieder einer Determinante zu gelangen, wird zuerst der Begriff der Inversion, oder wie Laplace sich ausdrückt, der Variation eingeführt. Die Elemente werden nicht durch doppelte Indices, sondern vielmehr durch Buchstaben mit angehängten

Indices unterschieden; behaupten dann letztre bei allen Permutationen die Ordnung des decadischen Systemes, so tritt eine solche Variation dann ein, wenn die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben unterbrochen ist.

Laplace entwickelt hierauf die independente Methode Cramer's, welche die einzelnen Glieder der Determinanten mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versieht, je nachdem die Anzahl der darin auftretenden Variationen gerade oder ungerade ist, bemerkt aber sofort, dass für die Praxis die von Bézout herrührende Regel, die wir oben (§. 4) kennen lernten, vorzuziehen sei. Es wird dann noch der Nachweis geliefert, dass diess recurrente Verfahren auf denselben Grundsätzen beruhe, wie das independente Cramer's.

Nunmehr geht Laplace dazu über, die Fundamentalsätze über das Vertauschen zweier Reihen in der Determinante zu beweisen. Da vorläufig noch jede symbolische Bezeichnungsweise und vor allem die uns so geläufige durch das quadratische Schema fehlte, so konnten die angegebenen Sätze nicht in der Formulirung vorgetragen werden, welche wir ihnen zu geben gewohnt sind. Welch' grosser Fortschritt in dieser symbolischen Bezeichnungsweise liegt, erhellt auf's Deutlichste, wenn wir die wenig übersichtliche Fassung dieser Theoreme bei Laplace sehen. Er sagt nämlich [34]): „Si au lieu de combiner d'abord la lettre a avec la lettre b, ensuite ces deux-ci avec la lettre c, et ainsi de suite; c'est-à-dire, si au lieu de combiner les lettres a, b, c, d. e, etc. dans l'ordre a, b, c, d, e, etc. on les eût combinées dans l'ordre a, b, c, d, e etc. ou a, d, b, c, e, etc. ou a, e, b, c, d, etc. ou etc. je dis qu'on aurait toujours eu la même quantité à la différence des signes près."

Bis hieher hatte es sich stets nur um die einzelnen Entwickelungs-Glieder einer Determinante gehandelt; nunmehr aber kommt es auf die Untersuchung dieser letztren selbst an, und somit machte sich auch die Nothwendigkeit fühlbar, eine selbstständige Benennung für die neuen Gebilde zu wählen. Laplace gebraucht den Namen „résultante", und indem nun in einer solchen zwei Reihen vertauscht werden, in der neu entstandnen abermals u. s. f., erhält er eine erste, zweite, dritte etc. Resultante, die er bezüglich durch R, R', R'', R''' etc. charakterisirt, und von denen er die Sätze

$$R' = -R$$
$$R'' = -R' = R$$
$$R''' = -R'' = R' = -R$$

etc. beweist. Auch auf den hieraus entspringenden Zusatz, dass eine Resultante mit gleichen Reihen sich annullirt, wird [35]) aufmerksam gemacht. Bei den nun folgenden Betrachtungen kann man nur lebhaft bedauern, dass Laplace die symbolische Bezeichnung Vandermonde's (s. o. §. 5) nicht gekannt oder doch wenigstens nicht sich zu eigen gemacht hat, indem durch deren Aufnahme seine Entwickelungen an Uebersichtlichkeit und damit auch an Verbreitung sicherlich gewonnen haben würden.

Bei der Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen setzt Laplace die constanten Glieder zunächst gleich Null voraus, reproducirt die Bézout'sche Bedingungsgleichung (s. o. §. 4) und zeigt dann [36]), dass eine auf diese Weise gebildete Determinante den gemeinschaftlichen Nenner der Brüche abgebe, welche man in dem allgemeineren Falle für die einzelnen Unbekannten des Systems finde, und wie sich aus diesem Nenner der Zähler in jedem einzeinen Falle herleiten lasse. Der Mangel einer passenden Bezeichnung lässt Laplace nicht dahin gelangen, die allgemeine Auflösungsformel hinzustellen, wie diess doch bereits Vandermonde in seinem ein Jahr früher der Academie mitgetheilten Memoire gelungen war. Auch die Anzahl der Entwickelungsglieder wird bestimmt; und hiebei erscheint es eigenthümlich, dass Laplace den früher von ihm gewählten Ausdruck Variation ignorirt und statt desselben das allerdings auch sonst von französischen Geometern meistens gebrauchte Wort „dérangement“ gebraucht.

Die bisherigen Untersuchungen Laplace's besitzen, wie man sieht, einen ganz elementaren Charakter und erheben sich in keiner Weise über die Leistungen seiner Vorgänger; anders verhält es sich dagegen mit den Betrachtungen, welche er auf der letzten Seite seiner Abhandlung leider in sehr aphoristischer Form zusammengedrängt hat. Er behandelt hier nämlich die Frage, ob und wie eine Determinante sich als ein Aggregat darstellen lasse, dessen einzelne Glieder Produkte aus Unterdeterminanten der ursprünglichen sind. Zu diesem Zwecke konnte er sich höchstens auf eine gelegentliche Bemerkung Vandermonde's stützen, welcher beiläufig die Determinante sechsten Grades in eine algebraische Summe aus Produkten von Determinanten des zweiten und vierten Grades zerfällt und so den Satz

$$\frac{\alpha\,|\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,b\,|\,c\,|\,d\,|\,e\,|\,f} = \frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,b} \cdot \frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{c\,|\,d\,|\,e\,|\,f} - \frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,c} \cdot \frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{b\,|\,d\,|\,e\,|\,f}$$

$$+\frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,d}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{b\,|\,c\,|\,e\,|\,f}+\frac{\alpha\,|\,\beta}{b\,|\,c}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,d\,|\,e\,|\,f}-\frac{\alpha\,|\,\beta}{b\,|\,d}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,c\,|\,e\,|\,f}$$

$$+\frac{\alpha\,|\,\beta}{b\,|\,e}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,c\,|\,d\,|\,f}+\frac{\alpha\,|\,\beta}{c\,|\,d}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,b\,|\,e\,|\,f}-\frac{\alpha\,|\,\beta}{c\,|\,e}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,b\,|\,d\,|\,f}$$

$$+\frac{\alpha\,|\,\beta}{c\,|\,f}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\xi}{a\,|\,b\,|\,d\,|\,e}+\frac{\alpha\,|\,\beta}{d\,|\,e}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,b\,|\,c\,|\,f}-\frac{\alpha\,|\,\beta}{d\,|\,f}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,b\,|\,c\,|\,e}$$

$$+\frac{\alpha\,|\,\beta}{e\,|\,f}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\xi}{a\,|\,b\,|\,c\,|\,d}-\frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,e}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{b\,|\,c\,|\,d\,|\,f}+\frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,f}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{b\,|\,c\,|\,d\,|\,e}$$

$$-\frac{\alpha\,|\,\beta}{b\,|\,f}\cdot\frac{\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon\,|\,\zeta}{a\,|\,c\,|\,d\,|\,e}$$

gefunden hatte. Allein diese Zerlegung hatte bei Vandermonde ausgesprochnermassen nur eine praktische Bedeutung für die wirkliche Auswerthung von Determinanten, und die Art und Weise, durch welche er zu seinem Satze gelangt war, bestand sicher nur in einem geregelten Tatonniren; damit stimmt auch, wenn er [37]) sagt: „La loi des permutations et des signes est assez manifeste dans ces exemples, pour qu'on en puisse conclure des développemens pareils pour le cas de huit et dix lettres, etc. du même alphabet."

Die hier angeregten Fragen sucht nun Laplace von einem allgemeinen Standpunkte aus zu behandeln, obwohl auch hier der Mangel einer systematischen Bezeichnung hindernd in den Weg tritt und dazu nöthigt, statt allgemeingültiger Betrachtungen sich mit Exemplifikationen zu begnügen.

Ein solches Beispiel ist folgendes. Gegeben sind fünf der Null gleiche Ausdrücke, lineare Funktionen von fünf Unbekannten, und es wird die Angabe der Bedingungsgleichung verlangt, welche unter den Coëfficienten obwalten muss. „Combinez les termes + abcd — abcd + etc. relatifs à quatre équations avec la lettre e, en observant 1. de n'admettre que les termes dans lesquels d précède e; 2. de changer de signe lorsque e change de place, et vous aurez

$$+\text{ abcde} -\text{ abdce} +\text{ abdec} +\text{ etc.}$$

donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, etc. et vous aurez

$$+\text{ a}^1\text{b}^2\text{c}^3\text{d}^4\text{e}^5 -\text{ a}^1\text{b}^2\text{d}^3\text{c}^4\text{e}^5 +\text{ a}^1\text{b}^2\text{d}^3\text{e}^4\text{c}^5 +\text{ etc.}$$

ensuite, au lieu de + $a^1b^2c^3d^4e^5$, écrivez + $(a^1b^2c^3)(d^4e^5)$; au lieu de — $a^1b^2d^3c^4e^5$, écrivez — $(a^1b^2c^4)(d^3e^5)$, et ainsi de suite etc." [38]). Aehnliche Regeln werden für Determinanten des sechsten und siebenten Grades gegeben, und zum Schlusse heisst es: „On décompo-

seroit de la même manière l'équation R en termes composés de facteurs de 4, de 5, etc. dimensions."

Wir müssen hier eine Bemerkung anknüpfen. Man übersieht sofort, dass aus den hier von Laplace gelieferten Zerlegungsformeln sich ein wichtiger Schluss ziehen lässt. Die Aggregate von Produkten aus Determinanten qten und (n — q)ten Grades, in welche eine Determinante vom nten Grade zerfällt, reduciren sich auf ihr Anfangsglied, wenn in dem quadratischen Schema der Elemente ein Rechteck, dessen Eckpunkt in eine der Diagonalreihen fällt, durch Nullen ausgefüllt ist. Dieser Schluss ist naheliegend, allein Laplace hat ihn nicht selbst gemacht, und ob wir deshalb, wenn wir diess Corollarium ebenfalls als Laplace'schen Determinantensatz bezeichnen, diess mit voller historischer Berechtigung thun, dürfte hiernach zu bezweifeln sein. Vielmehr ist die uns geläufige Formulirung dieses Theorems eines der vielen Verdienste Jacobi's [39]).

§. 7. Indem wir von Laplace zu Lagrange übergehen, dessen uns hier interessirende Arbeiten um Ein Jahr später fallen, bemerken wir einen beträchtlichen Unterschied in den Ausgangspunkten beider Gelehrten. Während Erstrer im unmittelbaren Anschluss an seine Vorläufer in den Determinanten ein treffliches Hülfsmittel für die Theorie der Gleichungen sah und auf möglichste Ausbildung dieses Hülfsmittels hinarbeitete, gelangte Lagrange sozusagen unbewusst zum Determinantenbegriff und erkannte mehrere wichtige Sätze dieser Theorie in speziellen Fällen, ohne deren Zusammenhang mit den Gebilden Cramer's hervortreten zu sehen. Es ist ein unverkennbares Zeichen dafür, wie dringend die Erfindung der Determinanten durch den damaligen Stand der Wissenschaft gefordert wurde, dass von den verschiedensten Seiten her auf das Zustandekommen dieser Erfindung hingestrebt werden musste.

Lagrange betrachtet den Ausdruck

$$\triangle = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'',$$

welcher offenbar der Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

gleich ist, sowie auch die folgenden Ausdrücke

$$\xi = y'z'' - z'y'' = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix},\quad \eta = z'x'' - x'z'' = \begin{vmatrix} x'' & z'' \\ x' & z' \end{vmatrix},\quad \zeta = x'y'' - x''y' = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

$$\xi' = zy'' - yz'' = \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y & z \end{vmatrix},\quad \eta' = xz'' - zx'' = \begin{vmatrix} x & z \\ x'' & z'' \end{vmatrix},\quad \zeta' = yx'' - y''x = \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x & y \end{vmatrix},$$

$$\xi'' = yz' - zy' = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix},\quad \eta'' = zx' - xz' = \begin{vmatrix} x' & z'' \\ x & z \end{vmatrix},\quad \zeta'' = xy' - yx' = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix},$$

und beweist alsdann die nachstehenden Identitäten [40]):

$$\begin{aligned}
x\xi + x'\xi' + x''\xi'' &= \triangle \\
x\eta + x'\eta' + x''\eta'' &= 0 \\
x\zeta + x'\zeta' + x''\zeta'' &= 0 \\
y\xi + y'\xi' + y''\xi'' &= 0 \\
y\eta + y'\eta' + y''\eta'' &= \triangle \\
y\zeta + y'\zeta' + y''\zeta'' &= 0 \\
z\xi + z'\xi' + z''\xi'' &= 0 \\
z\eta + z'\eta' + z''\eta'' &= 0 \\
z\zeta + z'\zeta' + z''\zeta'' &= \triangle.
\end{aligned}$$

Da nun die oben angeführten sechs Determinanten zweiten Grades Minoren der erstgenannten Determinante dritten Grades sind, so ist in jenen Relationen eine, natürlich nur am speziellen Beispiel erkannte, Anticipation des Satzes erhalten, dass der Ausdruck

$$a_{i1}\frac{d\triangle}{da_{k1}} + a_{i2}\frac{d\triangle}{da_{k2}} + \ldots + a_{in}\frac{d\triangle}{da_{kn}}$$

den Werth $\triangle$ oder 0 hat, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind — unter $\triangle$ eine Determinante nten Grades mit dem allgemeinen Elemente

$$a_{ik}$$

verstanden.

Auch noch andre wichtige Sätze der Determinantentheorie finden sich in dieser Abhandlung für den Fall $n = 3$ abgeleitet. So beweist **Lagrange** [41]) durch einfache algebraische Umformungen die Relation

$$\begin{aligned}
&\xi\eta'\zeta'' + \eta\zeta'\xi'' + \zeta\xi'\eta'' - \xi\zeta'\eta'' - \eta\xi'\zeta'' - \zeta\eta'\xi'' \\
&= (xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - z\dot{y}'x'')^2.
\end{aligned}$$

Der erste Ausdruck ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}$$

und wir haben also eine Wahrheit erhalten, die wir jetzt so aussprechen würden: Die adjungirte Determinante einer Determinante vom dritten Grade ist das Quadrat dieser letzteren.

Von besondrem Interesse ist es auch, dass Lagrange bereits zwei einfache Determinanten mit einander zu multipliciren verstand, oder, besser gesagt, eine Methode anwandte, welche unsrem gegenwärtigen Multiplikations-Verfahren analog ist. Die quadratische Form zweier Veränderlichen

$$py^2 + 2qyz + rz^2$$

wird durch die linearen Substitutionen

$$y = Ms + Nx$$
$$z = ms + nx$$

in die neue Form

$$Ps^2 + 2Qsx + Rx^2$$

umgewandelt, wobei

$$P = pM^2 + 2q\,Mm + rm^2$$
$$Q = pMN + q(Mn + Nm) + rmn$$
$$R = pN^2 + 2\,qNn + rn^2$$

zu setzen ist [42]). Soll dann die Identität

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q \\ q & r \end{vmatrix} \cdot \left(\begin{vmatrix} M & m \\ N & n \end{vmatrix} \right)^2$$

nachgewiesen werden, so hat man den Multiplikationssatz zweimal hintereinander anzuwenden, und erhält so zunächst den rechtsstehenden Ausdruck gleich

$$\begin{vmatrix} pM + qm & qM + rm \\ pN + qn & qN + rn \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M & m \\ N & n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} pM^2+2qMm+rm^2 & pMN+q(Mn+Nm)+rmn \\ pMN+q(Mn+Nm)+rmn & pN^2+2qNn+rn^2 \end{vmatrix},$$

und diesen Werth nimmt auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & R \end{vmatrix}$$

an, sobald man die entsprechenden Werthe in ihr substituirt.

Es versteht sich von selbst, dass blos der Gedankengang Lagrange's, nicht aber seine Darstellungsweise, mit dem hier Entwickelten übereinstimmen. Alles in Allem nimmt Lagrange in der geschichtlichen Fortbildung des Determinantencalculs eine höchst eigenthümliche Stellung ein, insoferne er dessen Grundsätze, ohne

damit etwas Besondres leisten zu wollen, kannte und auf's Beste praktisch zu verwerthen verstand.

§. 8. Man war bisher gewohnt, der Schule combinatorischer Analytiker, welche gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts von Leipzig ausgieng, eine für die Gesammtentwickelung der Mathematik, nur wenig bedeutsame wo nicht nachtheilige Rolle zuzuweisen, und so scheint sich auch zur Zeit noch Niemand die Frage vorgelegt zu haben, wie denn diese Männer sich gegen die Erfindungen ihrer grossen Zeitgenossen in Frankreich, also insbesondere auch gegen die Determinanten verhalten haben. Allein dem unpartheiischen Blicke hätte es nicht entgehen sollen, dass im Grunde diese Gebilde doch eigentlich nur combinatorische Symbole sind und principiell sich von den mancherlei den deutschen Combinatorikern eigenthümlichen Formen, wie Involutionen, combinatorische Integrale und dergleichen, in keiner Weise unterscheiden. Praktisch freilich hat die den Franzosen eigenthümliche Eleganz und Formgewandtheit ihrer Erfindung einen raschen Vorsprung vor jenen der Deutschen verliehen, so dass sie bald zu einem der mächtigsten Instrumente der modernen Analysis sich auszubilden vermochte, während jene höchstens eine historische Bedeutung behaupten. Das Folgende wird lehren, dass unsre Landsleute die Determinanten wohl kannten und ihren Zusammenhang mit ihren eigenen Bestrebungen richtig zu würdigen im Stande waren.

Bereits Hindenburg selbst, der Begründer jener Schule, erkannte den wesentlich combinatorischen Charakter der Auflösungsmethoden von Bézout und Cramer und lieferte einen Beweis für die Vorzeichenregel des Letzteren [43]).

Eine sehr ausführliche Abhandlung über die Determinanten lieferte auch Rothe, und zur Analyse dieser [44]) wollen wir uns jetzt wenden.

Die von ihm angewandte Bezeichnungsweise ist darin von der unsrigen verschieden, dass er als Träger der Indices die Zahlen des dekadischen Systemes selbst verwendet und jeder derselben einen „Stellenexponenten“ beisetzt, dessen Wesen am Besten ein Beispiel erläutert. Hat man die Permutation

6 4 3 9 8 10 1 7 2 5

und sucht man für jedes einzelne Element den Stellenzeiger, so zähle man ab, wie viele unter den rechts von einer beliebigen Zahl q stehenden Zahlen tiefer in der Zahlenreihe stehen, als q selbst. Ist

deren Anzahl p, so hat die Zahl q den Stellenexponenten p + 1 zu erhalten. Hiernach würde die obige Complexion folgendermassen durch doppelte Indices zu charakterisiren sein:

$$6_6\ 4_4\ 3_3\ 9_6\ 8_5\ 10_5\ 1_1\ 7_3\ 2_1\ 5_1.$$

Der Nutzen dieser höchst zweckmässigen Bezeichnung wird sofort klar bei Einführung des willkürlichen Satzes [45]): „Jede Permutation der Elemente 1, 2, 3 . . . r, werde mit dem Zeichen (+) versehen, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge gerader Zahlen, unter ihren Stellenexponenten vorkommt; mit dem Zeichen (—) hingegen, wenn die Menge der geraden Zahlen, unter den Stellenexponenten ungerade ist. Mit Hülfe dieser Festsetzungen wird dann ein sehr ausführlicher Beweis für die Cramer'sche Regel gegeben [46]), welche das Vorzeichen von dei Anzahl der in den Stellenexponenten vorhandenen Inversionen abhängig macht. Eigenthümlich ist hier auch die Formulirung des Begriffs „verwandter" Complexionen von der Beschaffenheit, dass wenn ein Element q der einen den Stellenexponenten p besitzt, in der andren der Stellenexponent q dem Elemente p zukommt. Ersichtlich besitzen verwandte Permutationen das nämliche Vorzeichen [47]).

Durch diese Vorbereitungen sieht sich dann Rothe [48]) in den Stand gesetzt, das Problem der Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen in Angriff zu nehmen. Mit Rücksicht auf die früheren Bestimmungen giebt man dem aufzulösenden Systeme folgende Gestalt, wo n und m irgend eine der Zahlen 1, 2, 3 . . . r bedeuten mögen,

$$\begin{aligned}
s^1 &= 1_1x^1 + 1_2x^2 + 1_3x^3 + \ldots + 1_mx^m + \ldots + 1_r\,x^r\\
s^2 &= 2_1x^1 + 2_2x^2 + 2_3x^3 + \ldots + 2_mx^m + \ldots + 2_r\,x^r\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s^n &= n_1x^1 + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots + n_mx^m + \ldots + n_r\,x^r\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s &= r_1x^1 + r_2x^2 + r_3x^3 + \ldots + r_mx^m + \ldots + r_r\,x^r.
\end{aligned}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der hier vorkommenden unbekannten Grössen wird angegeben, natürlich jedoch nur als ausgerechnete, nicht als symbolisch geschriebene Determinante. In den darauf folgenden Betrachtungen weist Rothe [49]) nach, dass man die Entwickelungs-Glieder ebensogut dadurch erhalten könne, dass man die ersten Indices unverändert lässt und die zweiten permutirt, als dass man bei ungeänderten zweiten alle möglichen Permutationen

der ersten bildet. Zu diesem Nachweis verhilft unsrem Verfasser auf's Einfachste der neue Begriff der verwandten Permutationen, und wir sehen so, dass ein Fundamentalsatz der Determinantentheorie, für welchen bis in die neueste Zeit eine völlig genügende Begründung vermisst ward, bereits bei dem deutschen Combinatoriker eine befriedigende Behandlung erfahren hat.

An dieser Stelle treten auch zuerst die Unterdeterminanten auf, indem [50])

$$\frac{d\triangle}{dp_q} = fp_q$$

gesetzt wird. Nachdem auch noch zwei weitre Theoreme, nämlich die folgenden:

$$1_n f1_n + 2_n f2_n + \ldots + r_n fr_n = \triangle,$$
$$1_n f1_m + 2_n f2_m + \ldots + r_m fr_m = 0$$

abgeleitet worden sind, kann das obige System linearer Gleichungen seine endgültige Auflösung erhalten. Während man nämlich bis jetzt blos den gemeinschaftlichen Nenner für die die Unbekannten darstellenden Brüche anzugeben vermochte, kann man jetzt folgendes Verfahren einschlagen. Man zerlegt die Determinante des Nenners, wenn man x^m finden will, nach den Elementen der mten Vertikalreihe in Unterdeterminanten, so dass man

$$N = 1_m f1_m + 2_m f2_m + \ldots + r_m fr_m$$

bekommt, und ersetzt nun 1_m, $2_m \ldots r_m$ bezüglich durch $s^1, s^2 \ldots s^r$. Das Schlussresultat wird dann sein:

$$x^m = \frac{s^1 f1_m + s^2 f2_m + \ldots + s^n fn_m + \ldots + s^r fr_m}{1_m f1_m + 2_m f2_m + \ldots + n_m fn_m + \ldots + r_m fr_m}.$$

Dieser in der hier skizzirten Weise hergeleitete Lehrsatz wird dann noch durch einige andere Betrachtungen verificirt.

Auch in einer Abhandlung Hauber's [51]) über das allgemeine Elevationsproblem finden sich Methoden, welche mit den oben (§. 4 und 5) dargestellten von Bézout und Vandermonde unverkennbare Aehnlichkeit besitzen.

§. 9. Ganz unabhängig von den Tendenzen der Hindenburg'schen Schule *), sowie auch unabhängig von Eliminationspro-

---

*) Es muss als eine offne Frage hingestellt werden, ob nicht Gauss aus dem Unterrichte J. F. Pfaff's eine grössre Bekanntschaft und Vertraut-

blem (im gewöhnlichen Sinne) erstand der Determinantentheorie in Gauss eine neue schöpferische Kraft. Die Gründe, welche ihn veranlassten, sich mit diesen Gebilden eingehend zu beschäftigen, waren wesentlich zahlentheoretischer Natur. Es stellte sich heraus, dass bei Untersuchung der sogenannten quadratischen Formen gewisse Aggregate von Wichtigkeit sind, die eben mit den Entwicklungsgliedern der von Bézout, Vandermonde und Laplace betrachteten Resultanten übereinstimmen. Dem Umstande, dass Gauss[52]) diese charakteristischen Ausdrücke als „Determinanten der quadratischen Formen“ bezeichnete, verdankt auch die allgemeinere Benennung Determinante ihr Dasein. Jedoch ist zu bemerken, dass Gauss nie die feminine Endung dieses Wortes adoptirte, analog dem Französischen, welches diese Formen ebenfalls unter dem Titel „le déterminant“ kennt. Auch der Ausdruck „adjungirtes System“, dessen Determinante Cauchy später (s. u. Kap. III. §. 4) als „adjungirte Determinante“ zur Geltung brachte, rührt von Gauss[53]) her. Schliesslich ist zu erwähnen, dass Gauss den Multiplikationssatz in einem speziellen Falle[54]) kannte und zur Anwendung brachte. Wollte man noch weitergehen und eine Anwendung der Determinanten auch in jenen Gegenständen erblicken, welchen wir gegenwärtig eine Determinantenform zu geben gewohnt sind, so müsste auch noch auf Gauss's Krümmungsmass, auf seine Regel zur Inhaltsbestimmung ebener Vielecke und manches andre hingewiesen werden.

§. 10. Es war nun noch ein Schritt zu thun, um die elementare Lehre von den Determinanten zum Abschlusse zu bringen, und diesen Schritt gethan zu haben ist das grosse Verdienst Cauchy's. Sein Ausgangspunkt war die Theorie der symmetrischen Funktionen, deren Betrachtung Ruffini auf seinen berühmten Beweis von der Unmöglichkeit einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen geführt hatte. Den symmetrischen Funktionen stellten sich gleichberechtigt die alternirenden an die Seite, und zu diesen gehören auch die Determinanten.

Cauchy schliesst sich in der Bezeichnung an Gauss an, dessen Untersuchungen überhaupt den ersten Anstoss zu seinen

---

heit mit den combinatorisch-analytischen Operationen mit fortnahm, als er selbst nachher zuzugeben geneigt war. Jedenfalls scheint[52]) der Einfluss Pfaff's gewöhnlich unterschätzt zu werden.

eigenen Forschungen über diesen Gegenstand gegeben zu haben scheinen. Nachdem er nämlich von der Erfindung dieser speziellen „fonction symétrique alternée“ gesprochen, fährt er [55]) fort: „M. Gauss s'en est servi avec avantage dans ses Recherches analytiques, pour découvrir les propriétés générales des formes du second degré, c'est-a dire, des polynomes du second degré à deux ou à plusieurs variables; et il a désigné ces mêmes fonctions sous le nom de déterminans. Je conserverai cette dénomination qui fournit un moyen facile d'énoncer les résultats; j'observerai seulement qu'on donne aussi quelquefois aux fonctions dont il s'agit le nom de résultantes à deux ou à plusieurs lettres. Ainsi les deux expressions suivantes, déterminant et résultante, devront être regardées comme synonymes.“

Cauchy ist der erste, welcher die durch doppelte Indices unterschiednen Elemente in Form des uns jetzt so natürlich scheinenden quadratischen Schema's anordnet. Damit sind dann auch sofort die Begriffe „suite horizontale“ und „suite verticale“ gegeben; die Elemente

$$a_{ik} \text{ und } a_{ki}$$

sind „conjugés“, die Elemente der ersten Diagonalreihe „termes principaux.“

Hiemit übereinstimmend wird [56]) das Produkt

$$a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}$$

als „produit principale“ hervorgehoben. Die Regel zur Bestimmung der Vorzeichen der einzelnen Entwickelungsglieder wird nach Cramer gegeben, und daran auch der Satz [57]) geknüpft, dass zwei Determinanten als gleich zu betrachten sind, wenn die Zeilen der einen bezüglich mit den Colonnen der andren der Reihe nach identisch sind.

Im Anschluss daran folgt die Zerlegung einer Determinante in Unterdeterminanten des nächst niederen Grades, und zwar wird der hiezu dienende wichtige Satz in folgender übersichtlichen Form aufgestellt [58]):

$$\Sigma[\ \pm\ a_{nn}\ \Sigma(\pm\ a_{11}a_{22}\ \ldots\ a_{n-1\ n-1})]$$

$$= a_{nn}b_{nn} + a_{n-1\,n}b_{n-1\,n} + \ldots + a_{2n}b_{2n} + a_{1n}b_{1n},$$

$$b_{nn} = \Sigma(\pm\ a_{11}a_{22}\ \ldots\ a_{n-1\ n-1})$$

$$b_{n-1\,n} = \Sigma(\mp\ a_{11}a_{22}\ \ldots\ a_{n\ n-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{2n} = \Sigma(\mp\ a_{11}a_{n2}\ \ldots\ a_{n-1\ n-1})$$

$$b_{1n} = \Sigma(\mp\ a_{n-1}a_{22}\ \ldots\ a_{n-1\ n-1}).$$

Die Einführung dieser neuen Funktionen b, deren Anzahl ersichtlich ebenso gross ist, als der Grad der ursprünglichen Determinante, veranlasst dann dazu, dieselben wieder zu einer Determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}$$

zusammenzustellen. Diese als „déterminant adjoint“ [59]) bezeichnete Determinante hat dann zur ursprünglichen eine höchst wichtige Relation, welche Cauchy herleitet. Zum Beweis bedarf er eines gewissen bereits mehrfach erwähnten Satzes über die Unterdeterminanten, welche er durch nachstehendes System von Gleichungen ausdrückt [60]):

$$\begin{aligned} D_n &= \Sigma^n (a_{11}b_{11}),\ 0 = \Sigma^n (a_{11}b_{12}),\ \ldots\ 0 = \Sigma^n (a_{11}b_{1n}), \\ 0 &= \Sigma^n (a_{12}b_{11}),\ D_n = \Sigma^n (a_{12}b_{12}),\ \ldots\ 0 = \Sigma^n (a_{12}b_{1n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= \Sigma^n (a_{1n}b_{11}),\ 0 = \Sigma^n (a_{1n}b_{12}),\ \ldots\ D_n = \Sigma^n (a_{1n}b_{1n}). \end{aligned}$$

Von hier wendet sich unser Verfasser zum Eliminationsproblem und reproducirt zunächst die Cramer-Laplace'sche Auflösungsmethode eines Systems linearer Gleichungen.

Im zweiten Abschnitt seiner Arbeit betrachtet Cauchy ein System „d'équations symétriques,“ nämlich das folgende

$$\begin{aligned} \alpha_{11}a_{11} + \ldots + \alpha_{1n}a_{1n} &= m_{11},\ \alpha_{21}a_{11} + \ldots + \alpha_{2n}a_{1n} = m_{12}, \\ \ldots\ \alpha_{n1}a_{11} + \ldots + \alpha_{nn}a_{1n} &= m_{1n}, \\ \alpha_{11}a_{21} + \ldots + \alpha_{1n}a_{2n} &= m_{21},\ \alpha_{21}a_{21} + \ldots + \alpha_{2n}a_{2n} = m_{22}, \\ \ldots\ \alpha_{n1}a_{21} + \ldots + \alpha_{nn}a_{2n} &= m_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{11}a_{n1} + \ldots + \alpha_{1n}a_{nn} &= m_{n1},\ \alpha_{21}a_{n1} + \ldots + \alpha_{2n}a_{nn} = m_{n2}, \\ \ldots\ \alpha_{n1}a_{n1} + \ldots + \alpha_{nn}a_{nn} &= m_{nn}, \end{aligned}$$

aus dessen Coëfficienten sich die drei Determinanten nten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = D_n,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \delta_n,$$

$$\begin{vmatrix} m_{11} & . & . & m_{1n} \\ . & . & . & . \\ m_{n1} & . & . & m_{nn} \end{vmatrix} = M_n$$

bilden lassen. Von diesen drei Determinanten beweist nun Cauchy [61]), dass

$$M_n = D_n \delta_n$$

ist, und hiemit ist der mit Recht berühmte Multiplikationssatz gefunden, mit dessen Erfindung der letzte Schlussstein in das Lehrgebäude unsrer Disciplin eingefügt war.

Auch in den nun folgenden Abschnitten bewegt sich Cauchy auf einem Boden, der vor ihm so gut wie gar nicht bebaut worden war. Setzt man den Numerus Combinationum aus n Elementen zur pten Classe,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!} = P,$$

so lassen sich im Ganzen P-Combinationen bilden, welche man der Reihe nach durch 1, 2, 3 . . . P — 1, P bezeichnen kann. Gegeben sei ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sind nun μ und ν zwei beliebige Zahlen aus jener Reihe 1 . . . P, so kann man offenbar unter den Elementen der Determinante eine Anzahl von der Beschaffenheit ausscheiden, dass ihr erster Index in der Combination μ, der zweite in der Combination ν mitbegriffen ist. Die übrig bleibenden Glieder, deren Gesammtheit Cauchy [62]) durch

$$a^{(p)}_{\mu\nu}$$

bezeichnet, lassen sich wieder als Determinante schreiben, und indem man sowohl μ als ν alle ganzzahligen positiven Werthe zwischen 1 und P annehmen lässt, erhält man P^2 Elemente, die man in der Form

$$(a^{(p)}_{1P}) \equiv \begin{vmatrix} a^{(p)}_{11} & a^{(p)}_{12} & . & . & . & a^{(p)}_{1P} \\ a^{(p)}_{21} & a^{(p)}_{22} & . & . & . & a^{(p)}_{2P} \\ . & . & . & . & . & . \\ a^{(p)}_{P1} & a^{(p)}_{P2} & . & . & . & a^{(p)}_{PP} \end{vmatrix} \equiv D_n$$

wieder zusammenstellen kann. Als Verallgemeinerung der oben angeführten Sätze über Unterdeterminanten wird dann folgendes System von Gleichungen [63]) bewiesen:

$$D_n = a_{11}^{(p)(p-n)} a_{PP} + \ldots + a_{P1}^{(p)(n-p)} a_{1P} \qquad 0 = a_{11}^{(p)(n-p)} a_{PP-1} \ldots + a_{P1}^{(p)(n-p)} a_{1P-1} \ldots$$

$$0 = a_{11}^{(p)(n-p)} a_{P1} + \ldots + a_{P1}^{(p)(n-p)} a_{11}$$

$$0 = a_{12}^{(p)(n-p)} a_{PP} + \ldots + a_{P2}^{(p)(n-p)} a_{1P} \qquad D_n = a_{12}^{(p)(n-p)} a_{PP-1} \ldots + a_{P2}^{(p)(n-p)} a_{1P-1} \ldots$$

$$0 = a_{12}^{(p)(n-p)} a_{P1} + \ldots + a_{P2}^{(p)(n-p)} a_{11}$$

. . . . . .

$$0 = a_{1P}^{(p)(n-p)} a_{PP} + \ldots + a_{PP}^{(p)(n-p)} a_{1P} \qquad 0 = a_{1P}^{(p)(n-p)} a_{PP-1} \ldots + a_{PP}^{(p)(n-p)} a_{1P-1} \ldots$$

$$D_n = a_{1P}^{(p)(n-p)} a_{P1} + \ldots + a_{PP}^{(p)(n-p)} a_{11}.$$

Hieraus fliessen die allgemeinen Zerlegungsregeln von Determinanten in Aggregate aus Minoren-Produkten. Der vierte Abschnitt geht in den hier angedeuteten Verallgemeinerungen noch weiter und ist, an sich von hohem Interesse, für den elementaren Aufbau der Determinantentheorie von geringerer Bedeutung.

Uebrigens gebührt Cauchy die Formulirung des Multiplikationstheorems nicht ausschliesslich; zu gleicher Zeit ward dasselbe vielmehr auch von Binet [64]) gefunden, von dessen Bemühungen Erstrer selbst Folgendes mittheilt: „M. Binet, dont je me félicite d'être l'ami, avait été conduit aux mêmes résultats par des recherches différentes. De retour à Paris, j'étais occupé de poursuivre mon travail, lorsque j'allai le voir. Il me montra son théorème, qui était semblable au mien. Seulement il désignait sous le nome de resultante ce que j'avais appelé déterminant [65]).

Wie weiterhin die Determinantentheorie unter den Händen Jacobi's, Cayley's, Brioschi's, Hesse's u. a. sich ausbildete, diess zu registriren kann noch nicht Aufgabe der Geschichte sein; jedoch möge noch bemerkt werden, dass als einer der ersten deutschen Mathematiker, welche von den Arbeiten Cauchy's und seiner Vorgänger Notiz nahmen, Grunert [66]) zu nennen ist.

Die Urgeschichte der Determinanten hat auch Terquem [67]) in einem anregend geschriebenen Artikel behandelt.

1) Praetorius, Problema, quod jubet ex quatuor lineis rectis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicatum, Norimbergae 1598.

2) Albert Girard, Tables des Sinus, Tangentes et Secantes, À la Haye 1626. Kap. 9.

3) Kummer in: Guhrauer, Joachim Jungius und sein Zeitalter, Leipzig 1850. S. 297.

4) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1872. S. 176.

5) Grassmann, Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibnitz erfundene geometrische Charakteristik, Leipzig 1847.

6) Leibnitz's Werke, ed. Gerhardt, II. Band. Halle 1864. S. 239.

7) Ibid. S. 240.

8) Ibid. S. 241.

9) Ibid. S. 245.

10) Bossut, Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik, Deutsch v. Reimer, II. Band, Hamburg 1804. S. 273.

11) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. Vorrede.

12) Cramer, Analyse des lignes courbes, Genève 1750.

13) Clebsch, Zum Gedächtniss an Julius Plücker, Göttingen 1872. S. 17.

14) Cramer, S. 59.

15) Ibid. S. 658.

16) Euler, Specimen Algorithmi singularis, Novi Comment. Acad. scient. Petrop. Tom. IX. S, 53.

17) Ibid. S. 57.

18) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. S. 57.

19) Euler, De usu novi Algorithmi in solvendo problemate Pelliano, Novi Comm. etc. Tom. XI. S. 28.

20) Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801. S. 17.

21) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, ed. Dedekind, Braunschweig 1863. S. 49.

22) Hindenburg, Höchstwichtiger Einfluss der Combinationslehre auf die Analysis, Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, 1. Thl., Leipzig 1796. S. 276.

23) Euler, Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations, Mémoires de l'académie de Berlin, année 1764.

24) Bézout, Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations, Mémoires de l'académie royale des sciences, année 1764. S. 292.

25) Ibid. S. 292.

26) Ibid. S. 294.

27) Hankel, Zarncke's liter. Centralblatt, Jahrg. 1868. S. 35.

28) Vandermonde, Mémoire sur l'élimination, Mém. de l'acad. roy., année 1772, seconde partie. S. 516.

29) Ibid. S. 517.

30) Ibid. S. 525.

31) Ibid. S. 532.

32) Vandermonde, Remarques sur les problèmes de situation, Mém. de l'ac. roy., année 1771. S. 573.

33) Laplace, Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, Mém. de l'ac. roy., année 1772, seconde partie. S. 294.

34) Ibid. S. 296.

35) Ibid. S. 298.

36) Ibid. S. 299.

37) Vandermonde, (s. o. sur l'élimination) S. 525.

38) Laplace, S. 304.

39) Jacobi, De formatione et proprietatibus determinantium, Crelle's Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, 26. Band. S. 290.

40) Lagrange, Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, Nouveaux mémoires de l'academie royale de Berlin, année 1773. S. 151.

41) Ibid. S. 153.

42) Lagrange, Recherches d'arithmétique, Nouv. mém. de l'acad. de Berlin, année 1773. S. 285.

43) Hindenburg, Vorrede zu: Ruedigeri specimen analyticum de lineis curvis secundi ordinis, Leipzig 1794.

44) Rothe, Ueber Permutationen, in Beziehung auf die Stellen der Elemente. Anwendung der daraus abgeleiteten Sätze auf das Eliminationsproblem, Samml. comb.-anal. Abhandl. 2. Theil, Leipzig 1800. S. 263.

45) Ibid. S. 266.

46) Ibid. S. 274.

47) Ibid. S. 278.

48) Ibid. S. 283.

49) Ibid. S. 285.

50) Ibid. S. 289.

51) Hauber, Auflösung des Elevationsproblems für Gleichungen, dieselbe Sammlung. S. 232.

52) Grunert's Archiv d. Math. u. Phys., 13. Theil. Lit. Ber. S. 702.

53) Gauss, Disquisitiones arithmeticae, S. 427.

54) Ibid. S. 170.

55) Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions apérées entre les variables qu'elles renferment, Journ. de l'école polyt., Tome X. S. 51.

56) Ibid. S. 54.

57) Ibid. S. 59.

58) Ibid. S. 62.
59) Ibid. S. 64.
60) Ibid. S. 67.
61) Ibid. S. 78.
62) Ibid. S. 94.
63) Ibid. S. 101.
64) Binet, Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques, Journ. de l'éc. pol. Tom. VIII. S. 280 ff.
65) Cauchy, S. 111.
66) Grunert, Math. Wörterbuch, Supplemente, 2. Abtheil. Leipzig 1836. S. 51 ff.
67) Terquem, Origine prémier des déterminants, Nouv. Ann. Bull. de Bibliogr. Tome XIX. S. 27.

Kapitel II.

Allgemeine Eigenschaften der Determinanten.

§. 1. Hat man ein System von n^2 Termen oder Elementen

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn}, \end{matrix}$$

und bildet aus diesen sämmtliche Produkte zu n Faktoren, welche das System zulässt, ohne dass in einem solchen Produkt mehr als Ein einer bestimmten Horizontal- oder Vertikalreihe angehöriges Element vorkäme, versieht man ferner nach einer sofort näher anzugebenden Regel diese Produkte zum Theil mit dem positiven, zum Theil mit dem negativen Vorzeichen und vereinigt sämmtliche so erhaltene Ausdrücke zu einer algebraischen Summe, so ist diese letztre die Determinante des obigen Systems von n^2 Elementen. Um das Vorzeichen jedes einzelnen Gliedes zu erhalten, ordne man dessen Faktoren so, dass die ersten Indices in der Ordnung der natürlichen Zahlen auf einander folgen und untersuche dann, wie viele Inversionen (s. o. Kap. I. §. 3) die Reihe der zweiten Indices darbietet. Ist deren Anzahl gerade, bezüglich 0, so ist das Zeichen positiv zu nehmen, im entgegengesetzten Falle negativ.

Eine Determinante von n^2 Elementen hat den Grad n.

Die Bezeichnung einer Determinante ist in älteren Werken (s. o. Kap. I. §. 5, 10) die folgende:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ 1 & 2 & . & . & . & n \end{pmatrix} \equiv \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn},$$

in neuerer Zeit aber gewöhnlich diese:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die beiden Reihen von Elementen

$$a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} \quad \ldots \quad a_{nn}$$
$$a_{1n} \quad a_{2\,n-1} \quad a_{3\,n-2} \quad \ldots \quad a_{n1}$$

mögen als erste und zweite Diagonalreihe bezeichnet werden. Alle Elemente, die in ihrem ersten Index übereinstimmen, gehören derselben Horizontalreihe oder Zeile, alle diejenigen, welche gleiche zweite Indices besitzen, gehören derselben Vertikalreihe oder Colonne an.

Als Beispiele für die wirkliche Ausrechnung von Determinanten mögen folgende dienen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ergiebt, zunächst noch ohne Vorzeichen, folgende Glieder:

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$, $a_{11}\, a_{22}\, a_{34}\, a_{43}$, $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44}$, $a_{11}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{42}$,
$a_{11}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{42}$, $a_{11}\, a_{24}\, a_{32}\, a_{43}$, $a_{12}\, a_{21}\, a_{33}\, a_{44}$, $a_{12}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{43}$,
$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{44}$, $a_{12}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{41}$, $a_{12}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{41}$, $a_{12}\, a_{24}\, a_{31}\, a_{43}$,
$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}\, a_{44}$, $a_{13}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{42}$, $a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\, a_{44}$, $a_{13}\, a_{22}\, a_{34}\, a_{41}$,
$a_{13}\, a_{24}\, a_{31}\, a_{42}$, $a_{13}\, a_{24}\, a_{32}\, a_{41}$, $a_{14}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{41}$, $a_{14}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{42}$,
$a_{14}\, a_{22}\, a_{31}\, a_{43}$, $a_{14}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{41}$, $a_{14}\, a_{21}\, a_{32}\, a_{43}$, $a_{14}\, a_{21}\, a_{33}\, a_{42}$.

Sämmtliche Complexionen sind hier bereits in den ersten Indices geordnet, so dass nur noch an den zweiten Indices die Abzählung übrig bleibt. So erhalten wir für die einzelnen Complexionen folgende Anzahl von Inversionen, indem wir dieselben der Kürze halber durch Ziffern bezeichnen:

1 — 0, 2 — 1, 3 — 1, 4 — 2, 5 — 3, 6 — 2, 7 — 1, 8 — 2,
9 — 2, 10 — 3, 11 — 4, 12 — 3, 13 — 2, 14 — 3, 15 — 3,
16 — 4, 17 — 4, 18 — 5, 19 — 6, 20 — 5, 21 — 4, 22 — 5,
23 — 3, 24 — 4.

Es erhalten demnach von den oben hingeschriebenen Gliedern das

1., 4., 6., 8., 9., 11., 13., 16., 17., 19., 21., 24.

das positive, hingegen das

2., 3., 5., 7., 10., 12., 14., 15., 18., 20., 22., 23.

das negative Vorzeichen.

Sind die in der Determinante vorkommenden Elemente nicht durch doppelte Indices unterschieden, sondern etwa durch Buchstaben und einfache Indices, so hat man in jedem Einzelprodukte die Faktoren alphabetisch zu ordnen und hiernächst auf die Indices die nämliche Regel anzuwenden. So ergiebt die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

folgende Glieder: $a_1\ b_2\ c_3$, $a_1\ b_3\ c_2$, $a_2\ b_1\ c_3$, $a_2\ b_3\ c_1$, $a_3\ b_1\ c_2$, $a_3\ b_2\ c_1$.

Nehmen wir hier an den Indices die erforderliche Abzählung vor, so hat 1 2 3 — 0, 1 3 2 — 1, 2 1 3 — 1, 2 3 1 — 2, 3 1 2 — 2, 3 2 1 — 3 Inversionen; unsre Determinante ist also gleich nachstehendem Aggregat:

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1\ c_2 - a_3b_2c_1.$$

§. 2. Wir haben im Vorigen vorausgesetzt, dass die ersten Indices stets eine dem Zahlensystem entsprechend geordnete Reihe bildeten, während die zweiten permutirt wurden; wir können statt dessen mit Baltzer [1]) auch sagen: Die Glieder der Determinante können aus dem Anfangsglied auch dadurch abgeleitet werden, dass man die zweiten Indices permutirt, während die ersten ihre Plätze behalten. Es liegt dann nahe, einen analogen Satz zu bilden, der so auszusprechen sein würde:

Die Glieder der Determinante können aus dem Anfangsglied auch dadurch abgeleitet werden, dass man die ersten Indices permutirt, während die zweiten ihre Plätze behalten.

Den Beweis dieses Satzes können wir nach Becker [2]) folgendermassen führen: Es ist blos zu zeigen, dass die Zahl der Inversionen in der nun von den ersten Indices gebildeten Complexion ebenso gross ist, wie bei der ersten Anordnung die in der Complexion der zweiten Indices, und hiezu genügt wiederum der Nachweis, dass diese beiden Complexionen entweder beide gerade oder beide ungerade Permutationen von 1 2 3 4 . . . . n sind.

Werden nun zwei Faktoren von $a_{1k_1}\ a_{2k_2}\ \ldots a_{nk_n}$ vertauscht, so vertauscht man hiedurch zwei zweite und zwei erste Indices; ist zuletzt die Reihe der zweiten Indices $k_1k_2\ \ldots\ k_n$ in 1 2 3 . . . n übergegangen, so ist die Reihe dieser ersten Indices durch eben

soviele Vertauschungen in eine ganz neue Permutation der Indices übergegangen, die aber der nämlichen Classe angehört. Da nun durch Faktorenvertauschung aus einem Gliede der durch Permutation der zweiten Indices erhaltenen Determinante das ihm gleiche in jener Determinante geworden ist, welche man durch Permutation der ersten Indices gewann, so ist für je zwei solche Glieder die Gleichheit der Zeichen und hiemit auch, dem Obigen gemäss, die Identität der beiden Determinanten-Entwickelungen dargethan.

Hieraus folgt demnach der Satz:

Der Werth einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man alle Colonnen zu Zeilen macht, und umgekehrt.

Es ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

§. 3. Hülfssatz. Vertauscht man in einer Buchstaben oder Zahlen enthaltenden Complexion zwei Elemente mit einander, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Gesetzt, wir hätten den Ausdruck

abPmnpQrst . . .,

und vertauschten in demselben P mit Q. Für die Gruppen ab und rst wird offenbar durch diese Vertauschung die Anzahl der Inversionen nicht geändert, wohl aber für die zwischenliegende Gruppe mnp. Hat nun diese Gruppe q Glieder, von denen $\alpha < P$ und $\beta > Q$ sind, und ist auch $P < Q$, so hat der Ausdruck

PmnpQ

$(\alpha + \beta)$ Inversionen. Da ferner α Glieder $< P$ sind, so sind $(q - \alpha) > P$ und $(q - \beta) > Q$.

Somit hat unser Ausdruck . . . QmnpP . . .

$$q - \alpha + q - \beta + 1 = 2q - (\alpha + \beta) + 1$$

Inversionen, indem ja Q mit P selbst eine Inversion bildet. Im Ganzen sind also nun, wenn γ und δ bezüglich die Anzahl der Inversionen in den Gruppen

. . . ab und rst . . .

bedeuten,

$$\gamma + \delta - (\alpha + \beta) + 2q + 1$$

Inversionen vorhanden; vorher waren es $(\gamma + \delta + \alpha + \beta)$, so dass die Anzahl der Inversionen durch die angegebene Operation sich um

$$2q - 2(\alpha + \beta) + 1,$$

also in der That um eine ungerade Zahl verändert hat.

Vertauscht man z. B. in der Complexion

3 5 1 2 8 6 4 7

5 mit 8, so erhält man

3 8 1 2 5 6 4 7.

Die ursprüngliche Complexion weist 10, die neue 11 Inversionen auf.

Aehnlich dem hier vorgetragnen ist der von Mollweide [3]) für dieses ursprünglich von Cramer (s. o. Kap. I. §. 2) herrührende Theorem gegebne Beweis.

§. 4. Von dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Lemma können wir sofort eine höchst wichtige Anwendung machen. Wir vertauschen im Anfangsgliede einer Determinante $\triangle$ von irgend zwei darin vorkommenden Elementen die ersten Indices, während wir die zweiten ungeändert lassen, so dass etwa

$$a_{11}\ a_{22} \ldots a_{pp} \ldots a_{ss} \ldots a_{nn}$$

in

$$a_{11}\ a_{22} \ldots a_{sp} \ldots a_{ps} \ldots a_{nn}$$

übergeht, und denken uns dann den zweiten Ausdruck als Diagonalreihe einer neuen Determinante $\triangle'$, deren erstes Glied demnach offenbar mit dem Minuszeichen versehen ist. Alle übrigen Glieder von $\triangle$ kommen nun auch in $\triangle'$, nur mit dem entgegengesetzten Zeichen, vor; denn während sie einerseits aus dem Anfangsgliede von $\triangle$ bezüglich durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Indexvertauschungen hervorgegangen waren, wurden sie aus dem Anfangsgliede von $\triangle'$ resp. durch eine ungerade oder gerade Anzahl von Indexvertauschungen gebildet.

Es ist demgemäss

$$\triangle = - \triangle'.$$

Die oben angegebene Vertauschung zweier Indices der Diagonalreihe ist aber offenbar identisch mit der Vertauschung zweier Zeilen; hätten wir statt der ersten Indices die zweiten genommen, so würden an die Stelle der Zeilen die Colonnen treten, so dass also ganz allgemein der Satz gewonnen ist:

Werden zwei Zeilen oder Colonnen mit einander vertauscht, so bleibt der absolute Werth der Determinante derselbe; nur das Vorzeichen ändert sich; ist $\triangle$ der ursprüngliche, $\triangle'$ jener Werth der Determinante, welchen sie nach p solchen Parallelverschiebungen angenommen hat, so ist

$$\triangle = (-1)^p \triangle'.$$

Es ist also

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_4 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_4 & c_3 \\ d_2 & d_1 & d_4 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Unmittelbar aus diesem Satze ergiebt sich anch der folgende:

Sind in einer Determinante zwei Zeilen oder Colonnen einander bezüglich gleich, so ist die Determinante identisch gleich Null.

Denn ist diess für die Determinante $\triangle$ der Fall, so hat man nach dem Vorigen sofort

$$\triangle = - \triangle,$$
$$\triangle = 0.$$

So ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & q \\ m & n & q \end{vmatrix} = anq - anq - bmq + bmq + cmn - cmn = 0.$$

§. 5. Da von jeder Zeile und Colonne nur je Ein Element in einem Gliede der ausgerechneten Determinante vorkommen darf, so tritt das Glied

$$a_{ik}$$

offenbar $(n - 1)$ mal in den Gliedern dieses Aggregates als Faktor auf, wenn die Determinante vom nten Grade ist. Denken wir uns nun, sämmtliche Elemente der Determinante, welche mit a_{ik} in der nämlichen Zeile und Colonne stehen, würden gleich Null, so verschwänden bei der Ausrechnung sämmtliche Glieder mit Ausnahme jener Summe von $(n - 1)$ Summanden, deren jeder a_{ik} zum Faktor hat. Ziehen wir diesen heraus, so finden sich in den Indices der übrig gebliebenen Complexionen alle möglichen Permutationen vor; das Aggregat lässt sich also als Determinante vom $(n - 1)$ten Grade schreiben, und wir haben den Lehrsatz:

Verschwinden in einer Zeile oder Colonne sämmtliche Glieder bis auf eines, so reducirt sich die Determinante auf ein Produkt aus diesem Glied in eine Determinante vom nächst niederen Grade.

Die übrig bleibende Determinante lässt sich, abgesehen vom Vorzeichen, sehr leicht bestimmen, indem man einfach die übrigen $(n-1)^2$ Glieder in einem quadratischen Schema anordnet. Um das Vorzeichen zu finden, hat man nur zu untersuchen, welches Vorzeichen das Anfangsglied der neuen Determinante, multiplicirt mit jenem Faktor, bei der Ausrechnung der ersten Determinante erhalten haben würde. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = - a_{34} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{11} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix},$$

denn aus dem Gliede

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{14}\ a_{55}$$

geht

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{34}\ a_{43}\ a_{55}$$

durch eine, also eine ungerade Anzahl von Permutationen hervor. Hingegen ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{42} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix},$$

denn aus dem Gliede

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$$

erhält man

$$a_{11}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{42}$$

durch 2 Permutirungen, d. h. eine gerade Anzahl. Ein bequemeres Mittel zur Vorzeichenbestimmung werden wir sehr bald kennen lernen.

Als Zusatz zu dem so eben discutirten Satze möge noch folgender angemerkt werden:

Wenn alle Glieder, welche auf einer Seite der Diagonalreihe stehen, verschwinden; so reducirt sich der Werth der Determinante auf ihr Diagonalglied.

So ist also

$$\begin{vmatrix} a & m & n & p \\ 0 & b & q & r \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

Von dieser Thatsache kann man Gebrauch machen, wenn es sich darum handelt, eine Determinante auf einen höheren Grad zu bringen, ohne ihren Werth zu ändern.

Soll z. B. die vorige Determinante einen um 3 Einheiten höheren Grad erhalten, so schreibe man sie folgendermassen:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & a & m & n & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & q & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix},$$

wo die Grössen α, β, γ natürlich ganz willkürlich gewählt werden dürfen. Allgemein würde diess so auszusprechen sein:

Will man einer Determinante bei unverändertem Werthe einen um q Einheiten höheren Grad verleihen, so setze man in der Verlängerung der Diagonalreihe q Einser an und fülle den so entstandenen Gnomon auf der einen Seite durch Nullen, auf der andern durch beliebige Grössen aus.

Man nennt eine solche Operation gewöhnlich das Rändern der Determinante.

§. 6. Es ist stets

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} a_{1n} & \dots & a_{11} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix}.$$

Um zu diesem Satze zu gelangen, untersuchen wir, wie der Werth einer Determinante durch successive Vertauschung zweier Reihen sich ändert. Indem wir der Kürze halber in diesem Falle die zweite der oben angedeuteten Bezeichnungsweisen wählen (s. o. §. 1) erhalten wir

$$\Sigma a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} \dots a_{nn} = (-1)^1 \cdot \Sigma a_{12}\, a_{21}\, a_{33}\, a_{44} \dots a_{nn}$$
$$= (-1)^2 \cdot \Sigma a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{44} \dots a_{nn} \text{ etc.}$$

Lassen wir nun, indem wir etwa $\Sigma a_{12}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{41} \dots a_{nn}$ als

(n — 1)te Umformung der ursprünglichen Determinante ansehen, a_{41} stehen und versetzen zwei andere Terme, so erhalten wir

$$\Sigma a_{12}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{41} \ldots a_{nn} = (-1)^{n-2} \cdot \Sigma a_{13}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{41} \ldots a_{nn}$$
$$= (-1)^{n-3} \cdot \Sigma a_{14}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{41} \ldots a_{nn} \text{ etc.}$$

Allgemein ist dann offenbar

$$\Sigma a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44} \ldots a_{nn}$$
$$= (-1)^{n-1+n-2+\ldots+2+1} \cdot \Sigma a_{1n}\ a_{2n-1}\ a_{3n-2}\ a_{4n-3} \ldots a_{n1}.$$

Der hier erscheinende Exponent von (— 1) stellt sich als arithmetische Progression dar; summiren wir sie, so folgt

$$\Sigma a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44} \ldots a_{nn} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma a_{1n}\ a_{2n-1}\ a_{3n-2}\ a_{4n-3} \ldots a_{n1},$$

was zu beweisen war.

Wir haben bis jetzt blos die Colonnen vertauscht; wir können dasselbe natürlich auch mit den Zeilen thun, und bekommen dann

$$\Sigma a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44} \ldots a_{nn} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma a_{n1}\ a_{n-1\,2}\ a_{n-2\,3}\ a_{n-3\,4} \ldots a_{1n}.$$

Indem wir beide Vertauschungen gleichzeitig vornehmen, ergiebt sich

$$\Sigma a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44} \ldots a_{nn} = (-1)^{\frac{2n(n-1)}{2}} \Sigma a_{nn}\ a_{n-1\,n-1} a_{n-2\,n-2} a_{n-3\,n-3} \ldots a_{11},$$

oder, da n(n − 1) unter allen Umständen eine gerade Zahl sein muss,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{nn} & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{11} \end{vmatrix},$$

ein Satz, welcher besonders für die Lehre von den Kettenbrüchen von grosser Wichtigkeit ist.

§. 7. In jedem Gliede einer entwickelten Determinante kommt von jeder Zeile bezüglich Colonne nur ein einziges Element vor; denken wir uns demnach jedes Element einer Reihe mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, so können wir dieselbe als gemeinschaftlichen Faktor heraussetzen. Diess liefert den Satz:

Multiplicirt man alle Elemente einer Zeile oder Colonne mit demselben Faktor a, so ist, wenn △ die ursprüngliche Determinante war, das Resultat gleich a △.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & aa_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & ab_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & ac_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & ad_3 & d_4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^4} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a^5b_1 & a^5b_2 & a^5b_3 & a^5b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

§. 8. Wir wollen annehmen, sämmtliche Elemente einer Reihe der Determinante $\triangle$ seien algebraische Summen von q Summanden, so zwar, dass die Anordnung der Vorzeichen für sämmtliche Elemente die gleiche sei. Entwickeln wir hierauf die Determinante, so stellt sich jedes einzelne Glied als ein Produkt aus $(n-1)$ einfachen Faktoren in eine Summe von q Gliedern dar, und zwar ist dieser zusammengesetzte Faktor für je n Glieder der Gleiche, vorausgesetzt, dass $\triangle$ den Grad n besass. Multipliciren wir mit dem in eine Klammer geschlossnen zusammengesetzten Faktor in jedem einzelnen Gliede aus, so ergiebt sich die Entwickelung der Determinante als ein Aggregat von nq Gliedern, die wir wiederum als q Determinanten vom nten Grade schreiben können. Diess Faktum lässt sich folgendermassen in Gestalt eines Lehrsatzes aussprechen:

Ist jedes Element einer Reihe eine algebraische Summe aus q gleichgeordneten Summanden, so kann man die Determinante in eine Summe von q Determinanten des gleichen Grades zerfällen, die in allen Theilen mit der früheren übereinstimmen und nur an Stelle der zusammengesetzten Reihe je einen der q Summanden enthalten.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \beta_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 + y_2 & z_1 - z_2 & u_1 + u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2 & y_2 & -z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}.$$

Die wiederholte Anwendung des hier charakterisirten Verfahrens lässt sofort den weitren Satz erkennen:

Ist die r_a te, r_b te . . . r_i te Zeile oder Colonne einer Determinante bezüglich aus s_1, s_2 . . . s_i Summanden zusammengesetzt, so kann dieselbe als eine Summe von

$$s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots s_i$$

Determinanten dargestellt werden, deren jede dann kein zusammengesetztes Element mehr enthält.

Man erhält auf diese Weise

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 - d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ c_1 & -d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{vmatrix}.$$

Die hier vorgetragnen Sätze sind von hoher praktischer Wichtigkeit, zumal wenn man noch folgenden unmittelbar daraus hervorgehenden hinzunimmt:

Eine Determinante bleibt unverändert, wenn man zu einer Zeile oder Colonne beliebig viele der andren Zahlen oder Colonnen hinzuaddirt, resp. davon subtrahirt, nachdem man dieselben vorher mit beliebigen constanten Zahlen multiplicirt hat.

Denn betrachten wir folgende Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \pm q_1 a_{1l} \pm q_2 a_{1m} \pm \ldots a_{1l} \ldots a_{1m} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2k} \pm q_1 a_{2l} \pm q_2 a_{2m} \pm \ldots a_{2l} \ldots a_{2m} \ldots a_{2n} \\ a_{31} \ldots a_{3k} \pm q_1 a_{3l} \pm q_2 a_{3m} \pm \ldots a_{3l} \ldots a_{3m} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk} \pm q_1 a_{nl} \pm q_2 a_{nm} \pm \ldots a_{nl} \ldots a_{nm} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

so ist dieselbe, dem eben Bewiesenen gemäss und mit Rücksicht auf §. 7, gleich folgender Summe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \ldots a_{1l} \ldots a_{1m} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2k} \ldots a_{2l} \ldots a_{2m} \ldots a_{2n} \\ a_{31} \ldots a_{3k} \ldots a_{3l} \ldots a_{3m} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk} \ldots a_{nl} \ldots a_{nm} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \pm q_1 \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1l} \ldots a_{1l} \ldots a_{1m} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2l} \ldots a_{2l} \ldots a_{2m} \ldots a_{2n} \\ a_{31} \ldots a_{3l} \ldots a^{3l} \ldots a_{3m} \ldots a^{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nl} \ldots a_{nl} \ldots a_{nm} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\pm q_2 \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \ldots a_{1l} \ldots a_{1m} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2m} \ldots a_{2l} \ldots a_{2m} \ldots a_{2n} \\ a_{31} \ldots a_{3m} \ldots a_{3l} \ldots a_{3m} \ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nm} \ldots a_{nl} \ldots a_{nm} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \pm \ldots$$

Da nun von der zweiten dieser Determinanten an jede einzelne zwei gleiche Colonnen enthält, so verschwinden dieselben nach §. 4 sämmtlich identisch, und es bleibt nur

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix},$$

d. h. die ursprüngliche Determinante übrig.

Dieser Satz erleichtert häufig die numerische Auswerthung einer Determinante, deren Elemente durch Zahlen gegeben sind, ohne dass diess ganze Zahlen zu sein brauchten.

Ist z. B. zu berechnen der Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 4 \\ 2 & 1 & 11 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix},$$

so multipliciren wir die erste Colonne mit $\frac{1}{3}$, die zweite mit $\frac{1}{2}$ und ziehen erstre von letztrer ab; diess giebt

$$6 . \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Indem wir hier die zweite Colonne, mit 24 multiplicirt, von der dritten subtrahiren, folgt weiter

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{6} & 1 & 11 \\ -2 & 46 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nunmehr multipliciren wir die erste Colonne mit 6 und ziehen von ihr die zweite ab; alsdann reducirt sich nach §. 5 die Determinante auf ihr zweites Diagonalglied, und wir erhalten als ihren Werth

$$(-\tfrac{1}{24}) . (-58) . 1 . 4 = 9\tfrac{2}{3}.$$

§. 9. Im Anschluss an die letzten Sätze möge noch auf einen Satz hingewiesen werden, dessen Bedeutung für die Elemente der Determinantentheorie erst kürzlich von Studnička hervorgehoben wurde [4]). Derselbe lautet:

Eine Determinante verschwindet identisch, wenn das Verhältniss der Differenzen gleichgestellter Elemente von zwei Paaren ihrer Zeilen oder Colonnen constant ist.

Es sei also in der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{n1} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

der Quotient

$$\frac{a_{ik} - a_{il}}{a_{ip} - a_{iq}} = C.$$

Mit Rücksicht auf §. 8 erhalten wir sofort

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} \; . \; a_{1i} & -a_{1l} & a_{1l} \; . \; a_{1p} & -a_{1q} & a_{1q} \; . \; a_{1n} \\ a_{21} \; . \; a_{2i} & -a_{2l} & a_{2l} \; . \; a_{2p} & -a_{2q} & a_{2q} \; . \; a_{2n} \\ a_{31} \; . \; a_{3i} & -a_{3l} & a_{3l} \; . \; a_{3p} & -a_{3q} & a_{3q} \; . \; a_{3n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} \; . \; a_{ni} & -a_{nl} & a_{nl} \; . \; a_{np} & -a_{nq} & a_{nq} \; . \; a_{nn} \end{vmatrix},$$

und hieraus, der getroffenen Festsetzung gemäss,

$$\triangle = \frac{1}{C} \begin{vmatrix} a_{11} \; . \; a_{1i} & -a_{1l} & a_{1l} \; . \; a_{1i} & -a_{1l} & a_{1q} \; . \; a_{1n} \\ a_{21} \; . \; a_{2i} & -a_{2l} & a_{2l} \; . \; a_{2i} & -a_{2l} & a_{2q} \; . \; a_{2n} \\ a_{31} \; . \; a_{3i} & -a_{3l} & a_{3l} \; . \; a_{3i} & -a_{3l} & a_{3q} \; . \; a_{3n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} \; . \; a_{ni} & -a_{nl} & a_{nl} \; . \; a_{ni} & - & a_{nl} \; a_{nq} \; . \; a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante sind aber zwei Colonnen gleich, also wird sie nach §. 4 identisch gleich Null.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 4 & 2 \\ 19 & 11 & 8 & 4 \\ 13 & 9 & 5 & 3 \\ 20 & 14 & 21 & 18 \end{vmatrix}$$

hat den Werth 0, weil

$$\frac{8-4}{4-2} = \frac{19-11}{8-4} = \frac{13-9}{5-3} = \frac{20-14}{21-18} = 2$$

ist.

§. 10. Wir haben in §. 1 eine zur wirklichen Auswerthung einer Determinante dienende Methode kennen gelernt, welche zwar sicher, jedoch bei grössren Determinanten nur mühsam, zum Ziele führt, insoferne sie sich auf die Abzählung der Index-Inversionen stützt. Die Anwendung dieser Methode wird jedoch völlig unmöglich, sobald die Elemente der vorgelegten Determinante nicht mehr durch doppelte Indices von einander unterschieden, sondern auf irgend welche andre Weise bezeichnet sind. Wir müssen demnach auf ein

andres Verfahren zur Entwickelung einer Determinante denken und es bietet sich uns ein solches ganz naturgemäss dar, sobald wir die Resultate des §. 5 zu Grunde legen.

Wir sahen daselbst, dass jede Determinante gleich gesetzt werden kann einem Produkt aus einem beliebigen Element in eine Determinante des nächst niederen Grades, wofern nämlich alle mit jenem Element in der nämlichen Zeile oder Colonne befindliche Elemente durch Nullen ersetzt waren. Durch n malige Anwendung dieses Satzes erhält man aber sofort den folgenden:

Man findet sämmtliche Glieder einer Determinante, wenn man sämmtliche Elemente einer Zeile oder Colonne je mit einer nach den Regeln des §. 5 gebildeten Determinante vom nächst niederen Grade multiplicirt, und jede solche Determinante in entsprechender Weise weiter behandelt. Man sagt dann, die ursprüngliche Determinante sei nach den Elementen der qten Zeile oder Colonne zerlegt.

Zur Vorzeichenbestimmung gelangen wir auf folgendem einfachen Wege. Es ist klar, dass zwei aufeinanderfolgende Elemente der nämlichen Zeile oder Colonne bei dieser Zerlegung nicht das nämliche Vorzeichen erhalten können, denn wenn wir die Anfangsglieder betrachten, so hat bei festbleibenden ersten oder zweiten Indices in den zweiten bezüglich ersten Indices nur Eine Inversion stattgefunden, das Zeichen musste also wechseln. Daraus ergiebt sich alsdann aber unmittelbar Folgendes:

Um bei der angegebenen Zerlegung das Vorzeichen von a_{ik} zu erhalten, untersuche man, ob

$$i + k$$

eine gerade oder ungerade Zahl ist; im ersten Falle hat man a_{ik} positiv, im zweiten negativ zu nehmen.

Diese einfache, bisher anscheinend nicht scharf genug hervorgehobene Regel ist es, deren wir oben (§. 5) bereits Erwähnung thaten.

Zerlegen wir auf diese Weise die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der zweiten Colonne, so erhalten wir, da $(1+2)$ eben so wie $(3+2)$ ungerade ist,

$$\triangle = - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}.$$

§. 11. Ein andres instruktives Beispiel, für welches auch die Bezeichnung durch doppelte Indices nicht in Anwendung kommt, ist folgendes. Bedeutende Mathematiker, wie u. a. auch Gauss [5]), haben sich mit der Aufgabe beschäftigt, auf einem gegebenen Schachbrett von 64 Feldern 8 Damen (Königinnen) so zu postiren, dass keine die andere anzugreifen im Stande ist; es handelt sich darum, nach bestimmten Regeln alle möglichen Lösungen der Aufgabe anzugeben, ohne eine derselben wegzulassen. Dieses Problem lässt sich nun mit Hülfe der Determinanten in einer höchst einfachen Weise lösen, und diese Behandlungsweise bietet noch den grossen Vortheil, ohne weiteres für jedes beliebige Schachbrett von n^2 Feldern verwendbar zu sein.

Bekanntlich setzt sich die Wirkungsweise einer Dame aus der des Läufers und Thurmes zusammen. Um nun alle denkbaren Stellungen zu finden, welche 8 Thürme, ohne sich gegenseitig zu stören, auf dem Brette einnehmen könnnen, müssen wir n Plätze heraussuchen, von denen keine zwei in der nämlichen Horizontal- oder Vertikalreihe liegen, d. h. denken wir uns das Brett als das quadratische Schema einer Determinante vom nten Grade und entwickeln wir dann dieselbe, so stellt jedes einzelne Glied dieser Entwickelung eine solche mögliche Stellung dar, und es kommt nur noch darauf an, aus diesen Gliedern alle diejenigen auszusondern, bei welchen auch keine Läufer-Einwirkung mehr stattfinden kann. Zu diesem Zwecke bilden wir uns folgende Determinante nten Grades

$$\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & e_2 & g_3 & i_4 & . & . & . \\ b_1 & a_2 & c_3 & e_4 & g_5 & . & . & . \\ d_2 & b_3 & a_4 & c_5 & e_6 & . & . & . \\ f_3 & d_4 & b_5 & a_6 & c_7 & . & . & . \\ h_4 & f_5 & d_6 & b_7 & a_8 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & a_{2(n-1)} \end{vmatrix},$$

deren Bildungsgesetz sofort klar ist, rechnen dieselbe aus und streichen zum Schluss sämmtliche Glieder weg, welche entweder zwei

gleiche Buchstaben oder zwei gleiche Indices besitzen. Die übrig bleibenden Glieder können dann als die möglichen Lösungen der Aufgabe betrachtet werden, und es ist sofort ersichtlich, dass deren Anzahl hiemit wirklich erschöpft ist.

Wir wollen die Aufgabe, der Kürze halber, nur für ein Schachbrett von 16 Feldern auflösen. Zerlegen wir die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & c_1 & e_2 & g_3 \\ b_1 & a_2 & c_3 & e_4 \\ d_2 & b_3 & a_4 & c_5 \\ f_3 & d_4 & b_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der zweiten Horizontalreihe, so erhalten wir, indem wir die hier natürlich gleichgültigen Vorzeichen weglassen, folgendes Resultat:

$$b_1 \begin{vmatrix} c_1 & e_2 & g_3 \\ b_3 & a_4 & c_5 \\ d_4 & b_5 & a_6 \end{vmatrix} \quad a_2 \begin{vmatrix} a_0 & e_2 & g_3 \\ d_2 & a_4 & c_5 \\ f_3 & b_5 & a_6 \end{vmatrix} \quad c_3 \begin{vmatrix} a_0 & c_1 & g_3 \\ d_2 & b_3 & c_5 \\ f_3 & d_4 & a_6 \end{vmatrix} \quad e_4 \begin{vmatrix} a_0 & c_1 & e_2 \\ d_2 & b_3 & a_4 \\ f_3 & d_4 & b_5 \end{vmatrix}.$$

Die erste und zweite dieser vier Determinanten wollen wir nun nach den Elementen der dritten Zeile, die dritte und vierte dagegen nach den Elementen der dritten und zweiten Colonne zerlegen; dies giebt

$$b_1 d_4 \begin{vmatrix} e_2 & g_3 \\ a_4 & c_5 \end{vmatrix} \quad b_1 b_5 \begin{vmatrix} c_1 & g_3 \\ b_3 & c_5 \end{vmatrix} \quad b_1 a_6 \begin{vmatrix} c_1 & e_2 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad a_2 f_3 \begin{vmatrix} e_2 & g_3 \\ a_4 & c_5 \end{vmatrix} \quad a_2 b_5 \begin{vmatrix} a_0 & g_3 \\ d_2 & c_5 \end{vmatrix}$$

$$a_2 a_6 \begin{vmatrix} a_0 & e_2 \\ d_2 & a_4 \end{vmatrix} \quad c_3 g_3 \begin{vmatrix} d_2 & b_3 \\ f_3 & d_4 \end{vmatrix} \quad c_3 c_5 \begin{vmatrix} a_0 & c_1 \\ f_3 & d_4 \end{vmatrix} \quad c_3 a_6 \begin{vmatrix} a_0 & c_1 \\ d_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad e_4 c_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_4 \\ f_3 & b_5 \end{vmatrix}$$

$$e_4 b_3 \begin{vmatrix} a_0 & e_2 \\ f_3 & b_5 \end{vmatrix} \quad e_4 d_4 \begin{vmatrix} a_0 & e_2 \\ d_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Die abermalige Entwickelung dieser Determinanten liefert endlich folgende Glieder:

$(b_1 d_4 a_4 g_3)$ $b_1 d_4 e_2 c_5$ $(b_1 b_5 b_3 g_3)$ $(b_1 b_5 c_1 c_5)$ $(b_1 a_6 b_3 e_2)$ $(b_1 a_6 c_1 a_4)$ $(a_2 f_3 e_2 c_5)$
$(a_2 f_3 a_4 g_3)$ $(a_2 b_5 a_0 c_5)$ $(a_2 b_5 d_2 g_3)$ $(a_2 a_6 a_0 a_4)$ $(a_2 a_6 d_2 e_2)$ $(c_3 g_3 f_3 b_3)$ $(c_3 g_3 d_2 d_4)$
$(c_3 c_5 f_3 c_1)$ $(c_3 c_5 a_0 d_4)$ $(c_3 a_6 d_2 c_1)$ $(c_3 a_6 a_0 b_3)$ $e_4 c_1 d_2 b_5$ $(e_4 c_1 f_3 a_4)$ $(e_4 b_3 a_0 b_5)$
$(e_4 b_3 f_3 e_2)$ $(e_4 d_4 a_0 a_4)$ $(e_4 d_4 d_2 e_2)$.

Schliessen wir alle diejenigen Glieder in Klammern ein, welche zwei Buchstaben oder zwei Indices gleich haben, so bleiben blos die beiden Glieder

$$b_1 d_4 e_2 c_5, \quad e_4 c_1 d_2 b_5$$

von Klammern frei, und diess sind mithin, wie man auch leicht

direkt verificiren kann, die beiden einzigen Lösungen, deren das Problem in diesem Falle fähig ist.

§. 12. Indem wir eine Determinante des nten Grades nach den Elementen einer bestimmten Reihe zerlegten, zerfiel dieselbe in eine algebraische Summe von n Determinanten des (n — 1)ten Grades, deren jede das betreffende Element zum Faktor hatte. Jede solche Determinante, welche demnach aus der früheren durch das Herausheben von $(n-1)^2$ Gliedern entstand, nennen wir eine erste Unterdeterminante oder partiale Determinante (Minor determinant) der ursprünglichen.

Wie man die einem gegebenen Elemente entsprechende erste Unterdeterminante findet, haben wir bereits gesehen. Diess Verfahren kann jedoch nach Jacobi[6]) auch aus einem andren Gesichtspunkte aufgefasst werden. Nehmen wir, wie bisher stets, an, dass sämmtliche Elemente einer Determinante $\triangle$ willkürliche von einander völlig unabhängige Grössen seien, so kann, wenn $\triangle$ in Bezug auf ein beliebiges Element a_{ik} differentiirt werden soll, nur das Produkt

$$a_{ik}\ \alpha_{ik}$$

in Betracht kommen, wenn wir unter α_{ik} die dem Elemente a_{ik} entsprechende erste Unterdeterminante von $\triangle$ verstehen. Da aber, der Voraussetzung gemäss, α_{ik} von a_{ik} unabhängig ist, so muss

$$\alpha_{ik} = \frac{d\triangle}{da_{ik}}$$

gesetzt werden, unter dem Differentialquotienten natürlich einen partiellen verstanden.

So ist also

$$\frac{d\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}}{db_2} = \begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Die Zerlegung einer Determinante nach ersten Unterdeterminanten giebt uns auch ein einfaches Mittel an die Hand, die Gliederanzahl einer entwickelten Determinante zu bestimmen. Gesetzt, eine Determinante vom nten Grade habe q solcher Glieder, so hat die Determinante vom nächst höheren Grade, wie ihre Zerfällung in Unterdeterminanten sofort zeigt, deren

$$q + q + q + \ldots + q_{(n+1)} = (n+1)q.$$

Hieraus folgert man, dass

$$q = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = n!$$

sein wird. Hiebei ist jedoch auch als selbstverständlich vorausgesetzt, dass zwischen den einzelnen Elementen keinerlei Relationen bestehen dürfen.

Als unmittelbare Folge aus dem Bisherigen ist noch der Satz von Wichtigkeit:

Die algebraische Summe

$$a_{i1}\frac{d\triangle}{da_{k1}} + a_{i2}\frac{d\triangle}{da_{k2}} + \ldots + a_{in}\frac{d\triangle}{da_{kn}}$$

hat den Werth $\triangle$ oder Null, je nachdem $k = i$ ist oder nicht.

So ist, für

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1a_2c_3 - a_1a_3c_2 - a_1a_2c_3$$

$$+ a_2a_3c_1 + a_1a_3c_2 - a_2a_3c_1 = 0.$$

§. 13. Um zu den ersten Unterdeterminanten zu gelangen, mussten wir uns die Frage vorlegen, welches der Coëfficient des Elementes

$$a_{ik}$$

in der Determinanten-Entwickelung sei. Es liegt nun nahe, diese Frage dahin zu verallgemeinern, dass man die Angabe des Ausdruckes fordert, welcher bei dieser Entwickelung mit dem willkürlich gebildeten Produkte

$$a_{pq}\, a_{rs}\, a_{tu}\, a_{vw} \ldots$$

multiplicirt erscheint. Es ist klar, dass in jenem Ausdrucke kein Element vorkommen darf, welches bezüglich der pten, rten, tten, vten ... Colonne und der qten, sten, uten, wten ... Zeile angehört. Es bleiben so mithin nur die nicht in jenen Reihen befindlichen Elemente zurück, deren Anzahl uns folgende Ueberlegung kennen lehrt. Ursprünglich mögen n^2 Elemente vorhanden gewesen sein; durch Ausschluss der pten Colonne und qten Zeile gehen hievon

$$n + n - 1 = 2n - 1$$

weitre Elemente ab. Die nämliche Anzahl würde auch durch den Ausschluss der rten Colonne und sten Zeile von dieser Zahl ab-

gehen, wenn nicht zwei Elemente bereits im Vorigen mit berücksichtigt wären, so dass also in Wirklichkeit der Abgang nur

$$2n - 3$$

beträgt. Durch mehrmalige Wiederholung dieser Abzählung finden wir so, dass noch

$$n^2 - (2n - 1),\ n^2 - (2n-1) - (2n-3),\ n^2 - (2n-1) - (2n-3) - (2n-5),$$

allgemein sonach

$$n^2 - (2n-1) - (2n-3) - \ldots - (2n - (2l-1))$$
$$= n^2 - 2ln + 1 + 3 + \ldots + 2l - 1.$$

Die Summe der ungeraden Zahlen ist nun bekanntlich stets ein vollständiges Quadrat, so dass also die Anzahl der übrig bleibenden Glieder

$$n^2 - 2ln + l^2 = (n-l)^2$$

beträgt, wenn das zu Grunde gelegte Produkt l Faktoren zählte. Diese $(n-l)^2$ Elemente erscheinen nun in Gestalt eines Aggregats von $(n-l)!$ Gliedern, jedes Glied zu $(n-l)$ Faktoren in allen möglichen Versetzungen, sodass dieselben sofort wieder als Determinante geschrieben werden können. Wir erhalten so den Satz:

Greift man aus einer Determinante vom nten Grade l Elemente heraus, deren Indices sämmtlich verschieden sind, vereinigt dieselben zu einem Produkt und fragt nach dem andren Faktor dieses Produktes in der entwickelten Determinante, so hat man nur alle Elemente, welche mit keinem der genannten einen ersten oder zweiten Index gemein haben, zu einer Determinante des $(n-l)$ten Grades zusammenzustellen. Diess ist der gesuchte Faktor.

Man pflegt eine solche Determinante die lte Unterdeterminante oder Partialdeterminante der ursprünglichen zu nennen.

Suchen wir z. B. den Faktor des Elementenproduktes

$$a_{24}\ a_{32}\ a_{57}\ a_{63}$$

in der Entwickelung der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix},$$

so ist derselbe gleich der 4ten Unterdeterminante des 3ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} & a_{16} \\ a_{41} & a_{45} & a_{46} \\ a_{71} & a_{75} & a_{76} \end{vmatrix}.$$

§. 14. Man erkennt nun auch sofort, dass die rte Unterdeterminante der sten Unterdeterminante einer Determinante vom nten Grade die (r + s)te Unterdeterminante der letzteren, also selbst vom Grade

$$n - (r + s)$$

ist. Hieraus folgt jedoch ein allgemeiner Ausdruck für jede beliebige Unterdeterminante. Behalten wir die Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphs bei, so wird nach §. 12 der Faktor von a_{pq} in der Determinantenentwickelung, d. h. die erste Unterdeterminante durch den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d\triangle}{da_{pq}}$$

dargestellt. Hiernach ist der Faktor des Produktes $a_{pq}\, a_{rs}$ gleich

$$\frac{d^2\triangle}{da_{pq}\, da_{rs}},$$

und ganz allgemein der Faktor des Produktes

$$a_{pq}\, a_{rs}\, a_{tu}\, a_{vw} \ldots a_{yz_{(m)}}$$

oder die mte Unterdeterminante gleich

$$\frac{d^m \triangle}{da_{pq}\, da_{rs}\, da_{tu}\, da_{vw} \ldots da_{yz}}.$$

Jede (n − 1)te Unterdeterminante einer Determinante vom nten Grade ist ein einzelnes Element derselben.

Bei den bisherigen Bestimmungen haben wir das Vorzeichen unberücksichtigt gelassen. Um diess zu bestimmen, multiplicire man das Produkt mit dem Diagonalglied der Unterdeterminante und sehe zu, ob diess so entstandne Glied in der ursprünglichen Determinantenentwickelung mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen wäre. Durch successive Vertauschung von je zwei zweiten Indices erhalten wir in dem vorhin angeführten Beispiele aus dem Anfangsgliede

$$a_{11}\quad a_{22}\quad a_{33}\quad a_{44}\quad a_{55}\quad a_{66}\quad a_{77}$$

folgende Produkte:

$$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{44}\ a_{55}\ a_{66}\ a_{77}$$
$$a_{11}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{43}\ a_{55}\ a_{66}\ a_{77}$$
$$a_{11}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{45}\ a_{53}\ a_{66}\ a_{77}$$
$$a_{11}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{45}\ a_{57}\ a_{66}\ a_{73}$$
$$a_{11}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{45}\ a_{57}\ a_{63}\ a_{76}.$$

Diess letzte Glied aber ist es, welches wir nöthig haben; da 5 Vertauschungen erforderlich waren, um es aus dem Anfangsgliede abzuleiten, so muss die oben berechnete Unterdeterminante das Minuszeichen erhalten.

§. 15. Im Anschluss an die hier durchgeführten Betrachtungen können wir uns die Frage vorlegen, wie viele Glieder einer entwickelten Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

m bestimmte Terme einer Reihe von Elementen enthalten, deren Verbindungslinie einer der beiden Diagonalen des Quadrates parallel läuft. Um hierüber Klarheit zu erhalten, brauchen wir nur an Stelle dieser Verbindungslinie die Diagonale selbst zu setzen. Die hiezu erforderlichen Formeln wurden völlig correkt zuerst von Weyrauch [7]) gegeben; dass in der von Baltzer [8]) gegebenen Darstellung ein kleines Versehen mituntergelaufen sei, hat Weyrauch [9]) nachgewiesen.

Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Glieder, welche überhaupt Diagonalenelemente enthalten. Den Coëfficienten von a_{11} enthalten nach §. 14 und 15 ersichtlich $(n-1)!$ Glieder, d. h. alle Glieder von

$$\frac{d\triangle}{da_{11}}.$$

Das Element a_{22} kommt an und für sich ebenfalls in $(n-1)!$ Gliedern vor, von denen jedoch bereits $(n-2)!$ in der obigen Anzahl enthalten sind. Beide Elemente, resp. eines von beiden, kommen somit in

$$2(n-1)! - (n-2)!$$

Gliedern vor; die drei Elemente a_{11}, a_{22}, a_{23} analog in

$$3(n-1)! - 3(n-2)! + (n-3)!$$

Gliedern u. s. f. Um also die gewünschte Anzahl zu erhalten, muss die Summe gebildet werden:

$$F=\begin{cases} (n-1)! \\ +(n-1)! - (n-2)! \\ +(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)! \\ +(n-1)! - 3(n-2)! + 3(n-3)! - (n-4)! \\ \quad\vdots \\ +(n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! \pm \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}1! \\ \qquad + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}0! \end{cases}$$

Diess giebt aber schliesslich den Werth

$$F = n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right).$$

Die Anzahl der Glieder, welche gar kein Diagonalenelement enthalten, findet man, wenn man F von n! abzieht; sie ist also

$$F' = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots + \frac{(-1)^{n}}{n!}\right).$$

Der Ausdruck F enthält nun auch die Anzahl derjenigen Glieder, welche m bestimmte Diagonalenelemente in sich aufnehmen. Nach §. 13 ist der Coëfficient des Produktes

$$a_{11}\ a_{22} \ldots a_{mm}$$

eine Unterdeterminante (n — m)ten Grades. Von den Gliedern dieser Determinante kann keines einen jener Faktoren enthalten; wir finden also die Anzahl der Glieder, welche dieser Bedingung genügen, wenn wir oben in F′ den Ausdruck n! durch (n — m)! ersetzen. So kommt

$$f = (n-m)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots + \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right).$$

§. 16. Die Lehre von den verschiedenen Unterdeterminanten einer Determinante findet eine wichtige Anwendung, wenn es sich darum handelt, den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete endliche Reihe zu entwickeln.

Um den zu diesem Zwecke einzuschlagenden Weg sogleich klar zu übersehen, knüpfen wir an ein spezielles Beispiel an und entwickeln die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix}.$$

Indem wir unausgesetzt die Vorschriften des §. 8 in Anwendung bringen, erhalten wir zunächst, mit Rücksicht auf §. 5,

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{22}+x & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix},$$

hierauf

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix} + x^2 (a_{33} + x)$$

und schliesslich

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + x^2 a_{11} + x \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ x^2 a_{22} + x^2 a_{33} + x^3,$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) x$$
$$+ (a_{11} + a_{22} + a_{33}) x^2 + x^3.$$

Der hier angenommene Zerlegungsmodus lässt sich nun aber ohne weiteres auch auf den allgemeinen Fall übertragen, indem (nach §. 5) die obige Determinante vom nten Grade in ein Aggregat von

$$2^n$$

Gliedern zerfallen würde. Wir erhalten so auf induktorischem Wege den Satz:

Die Determinante $\triangle$ lässt sich nach aufsteigenden Potenzen von x in eine Reihe entwickeln, so zwar, dass der Coëfficient von x^n die Einheit und derjenige von x^0 der Ausdruck

$$\triangle' = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist. Den Coëfficienten von x^q findet man, wenn man alle diejenigen qten Unterdeterminanten von $\triangle'$ summirt, deren Diagonalelemente der Diagonalreihe von $\triangle'$ angehören.

Einen eleganten combinatorischen Beweis dieses Theorems hat Baltzer [10]) geliefert.

§. 17. Von grossem Interesse ist es zu wissen, ob und wie eine gegebene Determinante sich als ein Aggregat von Produkten aus Unterdeterminanten darstellen lasse. Dass eine solche Zerlegung überhaupt möglich ist, erkennen wir aus folgendem Spezialfalle. Fassen wir von den 24 Gliedern, in welche die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

entwickelt werden kann, je 4 zusammen, so lässt sich $\triangle$ auch in folgender Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Diess ist aber eine sechsgliedrige Summe, deren Summanden Produkte aus zweiten Unterdeterminanten von $\triangle$ sind.

Allgemein würde diese Zerlegung so zu bewerkstelligen sein. Es sei n der Grad einer Determinante, wir zerlegen n in k Theile, so dass also

$$n = k'_1 + k'_2 + \ldots + k'_k$$

wäre. Ferner werden auch die Indices $1, 2 \ldots n$ in k Classen eingetheilt, so dass etwa

$$\begin{aligned} &1, \quad 2, \quad 3 \ldots k'_1 && \text{die erste} \\ &k'_1+1, \; k'_1+2 \ldots k'_2 && \text{die zweite} \\ &k'_2+1, \; k'_2+2 \ldots k'_3 && \text{die dritte} \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &k'_{k-1}+1, \; k'_{k-1}+2 \ldots k'_k && \text{die kte} \end{aligned}$$

Classe ausmachen. Diese Classen verbinde man nunmehr mit einander zu Permutationen von n Elementen, jedoch mit der Vorsicht, dass ein jeder Index höher sei, als jeder rechts von ihm stehende derselben Classe. Indem wir alle auf diese Weise zu erhaltenden Permutationen mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen, je nachdem dieselben aus dem Anfangsgliede durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Indexvertauschungen hervorgegangen sind, und dieselben hierauf zusammenaddiren, erhalten wir einen Ausdruck, der durch

$$S \pm \alpha^0 \alpha^1 \alpha^2 \ldots \alpha^n$$

bezeichnet werden möge. Substituiren wir hierauf in dem Ausdruck

$$S \pm \begin{bmatrix} a^0 a^1 \ldots a^{k'_1} \\ \alpha^0 \alpha^1 \ldots \alpha^{k'_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{k_1'+1} & a^{k'_1+2} & \ldots & a^{k'_2} \\ \alpha^{k'_1+1} & \alpha^{k'_1+2} & \ldots & \alpha^{k'_2} \end{bmatrix} \ldots\ldots \begin{bmatrix} a^{k'+1}_{k-1} & a^{k'+2}_{k-1} & \ldots & a^{k'}_{k} \\ \alpha^{k'+1}_{k-1} & \alpha^{k'+2}_{k-1} & \ldots & \alpha^{k'}_{k} \end{bmatrix}$$

den in Klammern stehenden Faktoren bezüglich die Determinanten

$$\Sigma \pm \begin{matrix} a^0 & a^1 & \ldots & a^{k'_1} \\ \alpha^0 & \alpha^1 & & \alpha^{k'_1} \end{matrix}, \quad \Sigma \pm \begin{matrix} a^{k'_1+2} & a^{k'_1+2} & & a^{k'_2} \\ \alpha^{k'_1+1} & \alpha^{k'_1+2} & \ldots & \alpha^{k'_2} \end{matrix} \text{ etc.,}$$

so erhalten wir die ursprüngliche Determinante in folgender Summenform:

$$S \pm \begin{bmatrix} \Sigma \pm a^0 a^1 \ldots a^{k'_1} \ldots & \Sigma \pm a^{k'+1}_{k-1} a^{k'+2}_{k-1} \ldots a^{k'}_{k} \\ \alpha^0 \alpha^1 \quad \alpha^{k'_1} & \alpha^{k'+1}_{k-1} \alpha^{k'+2}_{k-1} \ldots \alpha^{k'}_{k} \end{bmatrix}.$$

Die Anzahl der Determinantenprodukte unter diesem Summenzeichen ist

$$\frac{(n+1)!}{k_1'!\, k_2'! \ldots k'_k!}.$$

Die hier vorgetragne Ableitung rührt von Jacobi her; auch hat derselbe [11]) im unmittelbaren Anschluss daran noch weit allgemeinere Formeln zur Zerlegung von Determinanten entwickelt.

§. 18. Aus der zuletzt gewonnenen Formel können wir einen höchst bemerkenswerthen Schluss ziehen. Wir betrachten nämlich eine Determinante des n ten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m-1} & a_{1m} & a_{1m+1} & a_{1m+2} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m-1} & a_{2m} & a_{2m+1} & a_{2m+2} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m\,m-1} & a_{mm} & a_{m\,m+1} & a_{m\,m+2} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{m+1\,m+1} & a_{m+1\,m+2} & \ldots & a_{m+1\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{m+2\,m+1} & a_{m+2\,m+2} & \ldots & a_{m+2\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{n\,m+1} & a_{n\,m+2} & \ldots & a_{n\,n} \end{vmatrix},$$

welche die Eigenschaft hat, dass die $m(n-m)$ Elemente, welche m Colonnen mit $(n-m)$ Zeilen gemein haben, durch Nullen ersetzt sind. Diese Determinante zerlegen wir nun in ein Aggregat von Produkten aus $(n-m)$ten und $m$ten Unterdeterminanten, indem wir die Elemente für erstere aus den ersten m Colonnen, diejenigen für letztere dagegen aus den übrigen Colonnen des Systems entnehmen; auf diese Weise erhalten wir

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1\,m+1} & a_{m+1\,m+2} & \ldots & a_{m+1\,n} \\ a_{m+2\,m+1} & a_{m+2\,m+2} & \ldots & a_{m+2\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\,m+1} & a_{n\,m+2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + S,$$

wo S die andren Glieder der Summe vorstellt. Es ist jedoch ersichtlich, dass der eine Faktor all der Produkte, aus welchen sich S zusammensetzt, eine Zeile zeigt, die aus lauter Nullen besteht, und jede solche Determinante verschwindet nach §. 5 selbst identisch, so dass also auch S den Werth Null haben muss. Wir erhalten so den bereits im 1. Kapitel (§. 6) erwähnten Zusatz des Laplace'schen Satzes, der auch wohl selbst jenen Namen führt.

Wenn die Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Colonnen mit (n—m) Zeilen gemein haben, so reducirt sich dieselbe auf das Produkt einer (n—m)ten und einer mten Unterdeterminante.

Hieraus folgt dann aber auch sofort weiter, dass eine Determinante stets identisch verschwindet, wenn diejenigen Elemente, welche m Colonnen und $(n - m + q)$ Zeilen angehören, durch Nullen ersetzt werden, q natürlich als ganze positive Zahl $\geqq 1$ vorausgesetzt; man hat so

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1m+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1\,1} & \ldots & a_{m-1\,m} & a_{m-1\,m+1} & \ldots & a_{m-1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m\,m+1} & \ldots & a_{mn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n\,m+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Betrachten wir zunächst die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & M & N \\ a_2 & b_2 & c_2 & P & Q \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & a_5 & b_5 \end{vmatrix},$$

und subtrahiren in derselben bezüglich von der ersten und zweiten die vierte und fünfte Colonne, so bekommen wir

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1-M & b_1-N & c_1 & M & N \\ a_2-P & b_2-Q & c_2 & P & Q \\ 0 & 0 & c_3 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & c_5 & a_5 & b_5 \end{vmatrix},$$

und diese Determinante zerlegt sich nach unserem Satze sofort in das Produkt

$$\begin{vmatrix} a_1-M & b_1-N \\ a_2-P & b_2-Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & a_3 & b_3 \\ c_4 & a_4 & b_4 \\ c_5 & a_5 & b_5 \end{vmatrix},$$

denn es waren in $\triangle$ die 6 Elemente, welche zwei Colonnen mit drei Zeilen gemein hatten, durch Nullen ersetzt. Würde auch noch

$$c_3 = c_4 = c_5 = 0$$

werden, so hätten drei Colonnen mit drei Zeilen

$$3 \,.\, (5 - 3 + 1) = 9$$

Elemente gemein, es müsste also $\triangle$ verschwinden. Diess erhellt aber auch sofort aus dem Resultate der Transformation.

In ähnlicher Weise ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ c_1 & 0 & 0 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_2 & d_3 & d_4 & d_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ 0 & 0 & b_4 & b_1 \\ 0 & 0 & c_4 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_2 & d_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_4 & b_1 \\ c_4 & c_1 \end{vmatrix}.$$

§. 19. Da dieser Gegenstand besonders für das praktische Rechnen von hoher Bedeutung ist, so wollen wir noch etwas länger bei demselben verweilen und folgendes instruktive Beispiel vornehmen, welches auch durch die vielfach sich darbietenden Transformationen von Interesse ist; sämmtliche in den früheren Paragraphen dieses Kapitels aufgestellte Sätze kommen dabei zur Anwendung. Es soll die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & p_2 & x & -1 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 \end{vmatrix}$$

auf die Form

$$\begin{vmatrix} x+p_1 & p_2 \\ p_1 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix}$$

gebracht werden. Man vertausche zunächst nach §. 4 die zweite Zeile mit der dritten und hierauf die dritte Colonne mit der zweiten; wir erhalten so

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & p_2 & -1 \\ p_1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Indem wir nach Anleitung von §. 8 beziehungsweise die dritte und vierte Colonne zur ersten und zweiten addiren, folgt

$$\triangle = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x+p_3 & p_2 & 0 \\ p_1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Addiren wir hier zur zweiten Colonne die dritte und multipliciren letztre mit p_1, so muss nach §. 7 der Faktor $\frac{1}{p_1}$ vor die Determinante treten, und wir haben

$$\triangle = \frac{1}{p_1} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x+p_2+p_3 & p_1p_2 & 0 \\ p_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Jetzt werde die vierte Colonne mit p_3 multiplicirt und dann

resp. die dritte und vierte Colonne von der ersten und zweiten abgezogen; das Resultat wird sein

$$\triangle = \frac{1}{p_1 p_3} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 \\ -p_1 p_2 & x+p_2+p_3 & p_1 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}.$$

Nunmehr tritt der Laplace'sche Determinantensatz in Kraft, und wir finden

$$\triangle = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 \\ -p_1 p_2 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{p_1 p_3}.$$

Nun ist offenbar

$$\begin{vmatrix} x+p_1 & -1 \\ -p_1 p_2 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+p_1 & p_2 \\ p_1 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix},$$

die andre Determinante aber reducirt sich nach §. 5 auf ihr Diagonalglied, und wir haben also zum Schluss $\triangle$ auf die Form

$$\frac{p_1 p_3}{p_1 p_3} \begin{vmatrix} x+p_1 & p_2 \\ p_1 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix}$$

übergeführt, womit unsere Aufgabe gelöst ist.

§. 20. Gehen wir nunmehr zu einem andren Gegenstande über. Wir haben (§. 8) gesehen, dass zwei Determinanten ohne weiteres zu einander addirt oder von einander subtrahirt werden können, wenn sie in ihren Zeilen und Colonnen bis auf Eine übereinstimmen; wir fragen uns nun, ob auch für die Multiplikation zweier Determinanten Bedingungen betstehen, oder ob dieselbe unter allen Umständen möglich ist. Multipliciren wir die beiden Determinanten des zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1),$$

mit einander, so erhalten wir das Produkt

$$a_1 c_1 b_2 d_2 - b_1 c_1 a_2 d_2 - a_1 d_1 b_2 c_2 + b_1 d_1 a_2 c_2,$$

und diess kann sofort wieder, wie schon Gauss (Kap. I. §. 9) bemerkte, wieder in Form der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 & a_1 c_2 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 d_1 & b_1 c_2 + b_2 d_2 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Indem wir diese Determinante nach Anweisung des §. 8 weiter behandeln, zerfällen wir sie in eine Summe von

$$2^2 = 4$$

Gliedern und finden

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1c_1 & a_1c_2 \\ b_1c_1 & b_1c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1c_1 & a_2d_2 \\ b_1c_1 & b_2d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2d_1 & a_1c_2 \\ b_2d_1 & b_1c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2d_1 & a_2d_2 \\ b_2d_1 & b_2d_2 \end{vmatrix},$$

oder, indem wir die Hauptresultate des §. 4 berücksichtigen,

$$a_1b_1c_1c_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + c_1d_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - c_2d_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + a_2b_1d_1d_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Schliessen wir aus diesem hier angeführten Beispiele auf dem Wege der Induktion weiter, so gelangen wir zu dem wichtigen bereits von Cauchy (Kap. I. §. 10) gefundnen Multiplikationstheorem der Determinanten; es lautet:

Das Produkt zweier Determinantes des nten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } \triangle' = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ist wieder eine Determinante desselben Grades

$$\triangle'' = \triangle\triangle' = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

und zwar ist allgemein

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots a_{in}b_{kn} = \sum_{a=b=1}^{a=b=n} a_{ia}\, b_{kb}.$$

Zum Beweis dieses Satzes gehen wir von der Determinante

$$\triangle'' = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\dots+a_{1n}b_{1n} & \dots & a_{11}b_{n1}+a_{12}b_{n2}+\dots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+\dots+a_{2n}b_{1n} & \dots & a_{21}b_{n1}+a_{22}b_{n2}+\dots+a_{2n}b_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{12}+\dots+a_{nn}b_{1n} & \dots & a_{n1}b_{n1}+a_{n2}b_{n2}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}$$

aus und zerlegen dieselbe durch unausgesetzte Anwendung der Vorschriften des §. 8 in eine Summe von

$$n^n$$

Einzeldeterminanten, deren Elemente alsdann sämmtlich nicht mehr zusammengesetzt sind. Man erkennt nun, da sämmtliche untereinanderstehende Elemente von $\triangle''$ mit gemeinschaftlichen Faktoren be-

haftet sind, dass ein solcher Faktor auch jeder einzelnen Colonne der neu gebildeten Determinanten verbleiben wird, und setzen wir dieselben sämmtlich nach §. 7 vor die Determinanten, so erscheinen dieselben ohne Ausnahme multiplicirt mit einem Produkte von n Faktoren.

Nun zeigt der blosse Anblick von $\triangle''$, dass die Determinante

$$\triangle' = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

n mal erscheinen wird, immer multiplicirt mit einem n gliedrigen Produkte, dessen einzelne Faktoren Elemente der Determinante $\triangle$ sind, und zwar ersichtlich immer solche Elemente, welche in den Indices durchaus verschieden sind. Fassen wir sonach alle diese Produkte, die mit $\triangle'$ verbunden sind, zusammen, so ist zunächst

$$\triangle'' = \triangle\triangle' + s,$$

wo s wiederum eine Summe von

$$n^n - n! = n\,(n^{n-1} - (n-1)!)$$

Determinanten ist. Nun geht aber weiterhin aus unsrer Zerlegung hervor, dass jede einzelne dieser Determinanten, sobald wir nur den allen Gliedern einer Colonne gemeinschaftlichen Faktor entfernt haben, zwei gleiche Vertikalreihen hat und somit nach §. 4 sich annullirt. Demnach ist $s = 0$ und

$$\triangle'' = \triangle\triangle'.$$

Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung des Salmon'schen [12]).

§. 21. Die Wichtigkeit des Gegenstandes gestattet es wohl, die bei dem hier skizzirten Beweise eintretenden Vorgänge an einem speziellen Falle noch genauer darzustellen.

Es sei also gegeben die Determinante

$$\triangle''_{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13} \\ a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23} \\ a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}.$$

Durch unsre Zerlegung erhalten wir dann folgendes Aggregat von

$$3^3 = 27$$

Determinantcn, welche wir als von den gemeinschaftlichen Faktoren bereits befreit hinstellen wollen. Es ist

$$\overset{(3)}{\triangle}{}'' = a_{11}b_{11}a_{21}b_{21}a_{31}b_{31}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix} + a_{11}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{11}\\b_{21}&b_{22}&b_{21}\\b_{31}&b_{32}&b_{31}\end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}&b_{32}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{11}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{31}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{11}a_{22}a_{32}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}&b_{12}\\b_{21}&b_{23}&b_{22}\\b_{31}&b_{33}&b_{32}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{11}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{11}&b_{13}\\b_{21}&b_{21}&b_{23}\\b_{31}&b_{31}&b_{33}\end{vmatrix} + a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{33}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}&b_{13}\\b_{12}&b_{23}&b_{23}\\b_{13}&b_{33}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{31}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{11}&b_{11}\\b_{22}&b_{21}&b_{21}\\b_{32}&b_{31}&b_{31}\end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{11}&b_{12}\\b_{22}&b_{21}&b_{22}\\b_{32}&b_{31}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{11}&b_{13}\\b_{22}&b_{21}&b_{23}\\b_{32}&b_{31}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{12}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{12}&b_{11}\\b_{22}&b_{22}&b_{21}\\b_{32}&b_{32}&b_{31}\end{vmatrix} + a_{12}a_{22}a_{32}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{12}&b_{12}\\b_{22}&b_{22}&b_{22}\\b_{32}&b_{32}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{12}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{12}&b_{13}\\b_{22}&b_{22}&b_{23}\\b_{32}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}&b_{11}\\b_{22}&b_{23}&b_{21}\\b_{32}&b_{33}&b_{31}\end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}&b_{12}\\b_{22}&b_{23}&b_{22}\\b_{32}&b_{33}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{33}\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}&b_{13}\\b_{22}&b_{23}&b_{23}\\b_{32}&b_{33}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{31}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{11}&b_{11}\\b_{23}&b_{21}&b_{21}\\b_{33}&b_{31}&b_{31}\end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{11}&b_{12}\\b_{23}&b_{21}&b_{22}\\b_{33}&b_{31}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{13}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{11}&b_{13}\\b_{23}&b_{21}&b_{23}\\b_{33}&b_{31}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{12}&b_{11}\\b_{23}&b_{22}&b_{21}\\b_{33}&b_{32}&b_{31}\end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{32}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{12}&b_{12}\\b_{23}&b_{22}&b_{22}\\b_{33}&b_{32}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{12}&b_{13}\\b_{23}&b_{22}&b_{23}\\b_{33}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{13}&b_{11}\\b_{23}&b_{23}&b_{21}\\b_{33}&b_{33}&b_{31}\end{vmatrix} + a_{13}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix}b_{13}&b_{13}&b_{12}\\b_{23}&b_{23}&b_{22}\\b_{33}&b_{33}&b_{32}\end{vmatrix} + a_{13}b_{13}a_{23}b_{23}a_{33}b_{33}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}.$$

Von den hier stehenden Determinanten verschwindet nun die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te, 7te, 9te, 10te, 11te, 13te, 14te, 15te, 17te, 18te, 19te, 21te, 23te, 24te, 25te, 26te und 27te, und es bleibt nur übrig der Ausdruck

$$\overset{(3)}{\triangle}{}'' = \begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}),$$

oder, durch Zusammenfassung des letzten Aggregates,

$$\underset{(3)}{\triangle}'' = \underset{(3)(3)}{\triangle\triangle}'.$$

§. 22. Indem wir den hier besprochenen Satz mehrmals hintereinander zur Anwendung bringen, erkennen wir sofort die Wahrheit der Thatsache:

Das Produkt von beliebig vielen Determinanten desselben Grades ist wieder eine Determinante vom gleichem Grade.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{12}c_{11} + a_{11}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{12} + a_{12}b_{12}c_{21} + a_{11}b_{21}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} & a_{11}b_{11}c_{21} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{12}c_{11} + a_{21}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{12} + a_{22}b_{12}c_{21} + a_{21}b_{21}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} & a_{21}b_{11}c_{21} \end{vmatrix}.$$

Sind nun die zu multiplicirenden Determinanten nicht sämmtlich vom gleichem Grade, so behält der obige Satz gleichwohl seine Gültigkeit, indem nichts im Wege steht, eine Determinante vom $(n-q)$ten Grade nach den Regeln des §. 5 auf den nten zu bringen. Alsdann können wir unsren Satz in der Weise formuliren, wie diess zuerst Jacobi [13]) gethan hat:

Das Produkt von beliebig vielen Determinanten verschiedener Grade ist wieder eine Determinante, deren Grad mit dem höchsten unter den gegebenen Graden übereinstimmt, und deren Elemente linear aus denen der Faktoren zusammengesetzt sind.

Hat man etwa das Produkt

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix}$$

zu bilden, so giebt man der zweiten Determinante zunächst die Form

$$\begin{vmatrix} M & N & 0 & 0 & 0 \\ P & Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

und erhält dann als Resultat die Determinante des fünften Grades

$$\begin{vmatrix} a_1M+a_2N & a_1P+a_2Q & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1M+b_2N & b_1P+b_2Q & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1M+c_2N & c_1P+c_2Q & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1M+d_2N & d_1P+d_2Q & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1M+e_2N & e_1P+e_2Q & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}.$$

§. 23. Wir haben in den bisherigen Paragraphen dieses Kapitels eine Reihe verschiedener Operationen mit den Determinanten vornehmen gelernt, und haben uns, um mit den allgemeinen Eigenschaften derselben zum Abschlusse zu kommen, nur noch darüber Klarheit zu verschaffen, was man unter dem Differential einer Determinante zu verstehen habe. Drücken wir, wie gewöhnlich, durch α_{ik} die erste Unterdeterminante von

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus, welche dem Elemente a_{ik} entspricht, so ist (§. 12) bekanntlich

$$\alpha_{ik} = \frac{d\triangle}{da_{ik}}.$$

Bestimmen wir hieraus das totale Differential von $\triangle$, so erhalten wir nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung

$$d\triangle = \begin{cases} \frac{d\triangle}{da_{11}} da_{11} + \frac{d\triangle}{da_{21}} da_{21} + \ldots + \frac{d\triangle}{da_{n1}} da_{n1} \\ + \frac{d\triangle}{da_{12}} da_{12} + \frac{d\triangle}{da_{22}} da_{22} + \ldots + \frac{d\triangle}{da_{n2}} da_{n2} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + \frac{d\triangle}{da_{1n}} da_{1n} + \frac{d\triangle}{da_{2n}} da_{2n} + \ldots + \frac{d\triangle}{da_{nn}} da_{nn} \end{cases}$$

Schreiben wir den rechtsstehenden Ausdruck in Form einer Doppelsumme, so ergiebt sich

$$d\triangle = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik}\, da_{ik}.$$

Berechnen wir nach dieser Formel das Differential der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_5 \end{vmatrix},$$

so folgt, wenn wir nur die resultirenden Unterdeterminanten entsprechend vereinfachen,

$$\begin{aligned} d\triangle = {} & b_2c_2d_1e_5(da_2) + b_2c_2d_1e_1(da_5) + d_1(a_2c_2e_5 - a_5c_2e_1)(db_2) \\ & + d_1\,(a_2b_2e_5 - a_5b_2e_1)\,(dc_2) + b_2\,(a_2c_2e_5 - a_5c_2e_1)\,(dd_1) \\ & + a_5b_2c_2d_1\,(de_1) + a_2b_2c_2d_1\,(de_5). \end{aligned}$$

§. 24. Die oben aufgeworfne Frage wäre somit gelöst; jedoch hatten wir stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass alle hier auftretenden Elemente vollkommen unabhängig von einander seien; diese wollen wir nunmehr fallen lassen. Da der ganz allgemeine Fall einer Determinante, deren Elemente sämmtlich Funktionen von beliebig vielen Variablen sind, für die Praxis noch wenig Bedeutung gewonnen hat, so begnügen wir uns damit, die einzelnen Elemente als von ein und derselben veränderlichen Grösse x abhängig vorauszusetzen und die Ableitung der Determinante nach x zu bestimmen, so dass man hat

$$\triangle = \begin{vmatrix} f^1{}_{1(x)} & \cdots & f^1{}_{n(x)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f^n{}_{1(x)} & \cdots & f^n{}_{n(x)} \end{vmatrix}.$$

Es ist dann sofort klar, dass die im vorigen Paragraph entwickelte Formel, da sämmtliche Elemente für jeden bestimmten Werth von x sich als Constante darstellen, auch jetzt noch gültig ist. Wir erhalten demnach

$$d\triangle = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\triangle}{df^i{}_{k(x)}}\, d(f^i{}_{k(x)}),$$

oder auch

$$\frac{d\triangle}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\triangle}{df^i{}_{k(x)}}\, \frac{d(f^i{}_{k(x)})}{dx}.$$

In der Theorie der Kettenbrüche treten [14]) Determinanten von folgender Form auf:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & \varrho_1 x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \varrho_2 x & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \varrho_3 x \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soll diese Determinante differentiirt werden, so wird man sie am besten so umformen, dass ausschliesslich die Grösse x darin vorkommt, indem alsdann der totale Differentialquotient

$$\frac{d(fi_{k(x)})}{dx}$$

nur die beiden Werthe 0 und 1 anzunehmen vermag. Demgemäss hat man

$$\triangle = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & x & 0 & 0 \\ \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_2} & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_3} & \frac{1}{\varrho_3} & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

und weiterhin

$$\frac{d\triangle}{dx} = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \left(\begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_2} & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_3} & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_3} & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & x & 0 \\ \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_2} & x \\ 0 & \frac{1}{\varrho_3} & \frac{1}{\varrho_3} \end{vmatrix} \right).$$

§. 25. Ehe wir diess Kapitel schliessen, müssen wir noch auf eine gewisse abgekürzte Bezeichnungsweise aufmerksam machen, welche in der Determinantentheorie und besonders auch in der sogenannten neueren Algebra vielfach mit Nutzen angewendet wird.

Gesetzt, es sei uns bekannt, die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

verschwinde nicht allein selbst identisch, sondern es sei diess auch der Fall für ihre nach den Elementen der dritten Zeile genommenen ersten Unterdeterminanten, so müssten wir eigentlich diese Gesammtheit von Thatsachen durch das gleichzeitige Anschreiben der vier Gleichungen

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ausdrücken. Um den hieraus entstehenden Inconvenienzen zu entgehen, haben englische Mathematiker eine besondere neue Bezeichnung eingeführt; sie schreiben nämlich

$$\triangle = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = 0,$$

und nennen diess Symbol eine Matrix. Wenn wir diesen Begriff ganz allgemein auffassen, gelangen wir zu folgender Definition:

Unter der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a^{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

verstehen wir die Gesammtheit aller derjenigen $(n - m)$ten Unterdeterminanten mten Grades, welche aus der Determinante vom nten Grade

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m+1\,1} & a_{m+1\,2} & \cdots & a_{m+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n} \end{matrix} \right|$$

gebildet werden können, ohne dass ein erster Index $q > m$ zugelassen würde.

So bedeutet also

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \right\|$$

die 6 Unterdeterminanten zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

welche aus der Determinante vierten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

durch Weglassung der beiden letzten Horizontalreihen gebildet werden können. Es leuchtet ein, dass an der Matrix gewisse Operationen sich in ganz analoger Weise vollziehen lassen, wie bei den wirklichen Determinanten.

1) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. S. 7.

2) Becker, Ueber einen Fundamentalsatz der Determinantentheorie, Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, 16. Jahrgang. S. 530.

3) Mollweide, Demonstratio eliminationis Cramerianae, Lipsiae 1811. §. 9.

4) Studnička, Determinantensatz, Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1873. S. 342.

5) Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, herausgegeben von Peters, VI. Band, Altona 1865. S. 106.

6) Jacobi, De formatione et proprietatibus Determinantium, Crelle's Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, 22. Band. S. 293.

7) Weihrauch, Zur Theorie der Determinanten, ibid. 74. Band. S. 273.

8) Baltzer, S. 29.

9) Weihrauch, Zur Determinantenlehre, Schlömilch's Zeitschr. 19. Jahrg. S. 420.

10) Baltzer, S. 30.

11) Jakobi, S. 299 ff.

12) Salmon, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, Deutsch v. Fiedler, Leipzig 1863. S. 15.

13) Jakobi, S. 312.

14) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. S. 88.

Kapitel III.

Determinanten von besondrer Form.

Differenzenprodukt, adjungirte Determinanten, symmetrische und symmetrale Determinanten.

§. 1. Es seien n willkürliche Terme

$$a_1, a_2 \ldots a_n$$

gegeben, und ihre sämmtlichen Differenzen gebildet, deren es im Ganzen

$$\tfrac{1}{2}\, n(n+1)$$

giebt. Das Produkt dieser Differenzen, also der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi = {} & (a_2-a_1)\,(a_3-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_1)\,(a_n-a_1)\times \\ & (a_3-a_2)\ldots(a_{n-1}-a_2)\,(a_n-a_2)\times \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})\times \\ & (a_n-a_{n-1}), \end{aligned}$$

hat nun die interessante Eigenschaft der Determinante nten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^0 a_1^1 a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ a_2^0 a_2^1 a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^0 & a_n^1 & a_n^2 \ldots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

gleich zu sein, wie diess zuerst von Cauchy [1]) bemerkt wurde.

Der Beweis dieses Satzes gestaltet sich am einfachsten folgendermassen. Wir ziehen in $\triangle$ jede qte Zeile von der $(q+1)$ten ab und erhalten so

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & \ldots & a_2^{n-1}-a_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_n-a_{n-1} & a_n^2-a_{n-1}^2 & \ldots & a_n^{n-1}-a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante lässt sich nun nach Kap. II. §. 5 sofort auf den (n — 1)ten Grad reduciren; bringt man auch §. 7 zur Anwendung, so ergiebt sich, da der Ausdruck

$$a_p^q - a_{p-1}^q$$

stets durch $(a_p - a_{p-1})$ theilbar ist,

$$\triangle = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & \ldots & a_2^{n-2} + a_2^{n-3} a_1 + \ldots + a_2 a_1^{n-3} + a_1^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_2 & \ldots & a_3^{n-2} + a_3^{n-3} a_2 + \ldots + a_3 a_2^{n-3} + a_2^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n + a_{n-1} & \ldots & a_n^{n-2} + a_n^{n-3} a_{n-1} + \ldots + a_n a_{n-1}^{n-3} + a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante $\triangle$ enthält also jedenfalls (n — 1) der obigen Differenzen als Faktoren. Auf die zuletzt erhaltene Determinante wenden wir das eben beschriebne Verfahren gleichfalls an und bekommen dann

$$\triangle = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2 & \ldots & a_2^{n-2} + a_2^{n-3} a_1 + \ldots + a_2 a_1^{n-3} + a_1^{n-2} \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 + a_3 a_2 - a_1^2 - a_2 a_1 & \ldots & a_3^{n-2} + \ldots + a_2^{n-2} - a_1^{n-2} - \ldots - a_1^{n-2} \\ 0 & a_4 - a_2 & a_4^2 + a_4 a_3 - a_2^2 - a_3 a_2 & \ldots & a_4^{n-2} + \ldots + a_3^{n-2} - a_2^{n-2} - \ldots - a_2^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_n - a_{n-1} & a_n^2 + a_n a_{n-1} - a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} + \ldots + a_{n-1}^{n-2} - a_{n-1}^{n-2} - \ldots - a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Das allgemeine Glied der (q + 1)ten Colonne hat hier die Form

$$a_p^q + a_p^{q-1} a_{p-1} + \ldots + a_p a_{p-1}^{q-1} - a_{p-1}^q - a_{p-1}^{q-1} a_{p-2} - \ldots - a_{p-1} a_{p-2}^{q-1},$$

ist also durch $(a_p - a_{p-1})$ theilbar. Setzt man demnach den allen Elementen ein und derselben Zeile gemeinsamen Faktor heraus, so bleiben in der ersten Colonne ausschliesslich positive Einheiten stehen, und durch Subtraktion jeder Zeile von der zunächst unter ihr stehenden folgt wiederum

$$\triangle = (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})\,(a_3 - a_1)\,(a_4 - a_2) \ldots (a_n - a_{n-2})\,\delta,$$

wo δ eine Determinante vom (n — 2)ten Grade ist. Denken wir uns in gleichem Sinne n Operationen vollzogen, so bleibt schliesslich die Einheit übrig, multiplicirt mit

$$n-1 + n-2 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n}{2}(n+1)$$

Differenzen, d. h. es ist

$$\triangle = \Pi.$$

Zur bessren Veranschaulichung dieser Methode möge noch die Transformation der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

hier Platz finden. Die erste Operation ergiebt

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & a_2^3 - a_1^3 \\ a_3 - a_2 & a_3^2 - a_2^2 & a_3^3 - a_2^3 \\ a_4 - a_3 & a_4^2 - a_3^2 & a_4^3 - a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_2)\,(a_4 - a_3) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2 \\ 1 & a_3 + a_2 & a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2 \\ 1 & a_4 + a_3 & a_4^2 + a_4 a_3 + a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Weiterhin hat man

$$\triangle = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_3) \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & a_3^2 + a_3 a_2 - a_1^2 - a_2 a_1 \\ a_4 - a_3 & a_4^2 + a_4 a_3 - a_3^2 - a_3 a_2 \end{vmatrix}.$$

Dividirt man hier die erste und zweite Zeile bezüglich durch $(a_3 - a_1)$ und $(a_4 - a_2)$, so wird

$$\triangle = (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_2)\,(a_4 - a_3)\,(a_3 - a_1)\,(a_4 - a_2) \begin{vmatrix} 1 & a_3 + a_2 + a_1 \\ 1 & a_4 + a_3 + a_2 \end{vmatrix}.$$

Indem schliesslich die erste Zeile von der zweiten subtrahirt wird, findet sich als Schlussresultat:

$$\triangle = (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_2)\,(a_4 - a_3)\,(a_3 - a_1)\,(a_4 - a_2)\,(a_4 - a_1),$$

wie behauptet war.

§. 2. Die Determinante n ten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^{n-2} & a_1^{q} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_2^{n-2} & a_2^{q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-2} & a_n^{q} \end{vmatrix},$$

welche als Verallgemeinerung der vorigen aufgefasst werden kann, ist durch

$$\Pi = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ohne Rest theilbar. Um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur zu untersuchen, ob jeder Faktor von Π in $\triangle$ enthalten ist.

Subtrahiren wir die t te von der s ten Zeile, unter t und s willkürliche ganze Zahlen

$$\geqq 1, \leqq n$$

verstanden, so nimmt unsre erste Determinante folgende Gestalt an:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^{n-2} & a_1^{q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_s - a_t & a_s^2 - a_t^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_s^{n-2} - a_t^{n-2} & a_s^{q} - a_t^{q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-2} & a_n^{q} \end{vmatrix},$$

und man erkennt sofort, dass sämmtliche Elemente der s ten Zeile nunmehr die Grösse

$$a_s - a_t$$

als gemeinschaftlichen Faktor enthalten. Daraus folgt dann aber weiter, dass jede der $\frac{n}{2}(n+1)$ Differenzen, deren Produkt Π aus-macht, in $\triangle$ ohne Rest aufgeht, und diess war zu beweisen.

Es soll diese Division nun auch wirklich ausgeführt werden, wobei freilich die eben bewiesne Eigenschaft des Quotienten zurücktritt. Zerlegt man $\triangle$ nach den Elementen der letzten Colonne in erste Unterdeterminanten, so ergiebt sich zunächst

$$\Delta = (-1)^{n-1} a_1{}^q \frac{d\Delta}{da_1{}^q} - + \ldots + (-1)^{n+s-2} a_s{}^q \frac{d\Delta}{da_s{}^q}$$
$$- + \ldots + (-1)^{2(n-1)} \frac{d\Delta}{da_{nq}} .$$

Jede der hier auftretenden Unterdeterminanten hat nun aber dieselbe Form wie Π; wir können also auf jede einzelne die Resultate des vorigen Paragraphen anwenden und finden so

$$\frac{d\Delta}{da_s{}^q} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1{}^2 & \ldots & a_1{}^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{s-1} & a_{s-1}{}^2 & \ldots & a_{s-1}{}^{n-2} \\ 1 & a_{s+1} & a_{s+1}{}^2 & \ldots & a_{s+1}{}^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n{}^2 & \ldots & a_n{}^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_2 - a_1)\ldots(a_{s-1} - a_1)(a_{s+1} - a_1)\ldots(a_n - a_1) \\ = (a_3 - a_2)\ldots(a_{s-1} - a_2)(a_{s+1} - a_2)\ldots(a_n - a_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (a_n - a_{n-1}). \end{array}$$

Denken wir uns diesen Werth oben eingesetzt und mit Π dividirt, so stellt sich der Quotient dar als eine algebraische Summe aus n Summanden, deren allgemeines Glied gleich

$$\frac{\pm . a_s{}^q}{(a_s - a_1)(a_s - a_2)\ldots(a_s - a_{s-1})(a_{s+1} - a_s)\ldots(a_n - a_s)}$$

ist. Wir bekommen demnach

$$\sum_{s=2}^{s=n} (-1)^{n+s-2} \frac{a_s{}^q}{(a_s - a_1)\ldots(a_s - a_{s-1})(a_{s+1} - a_s)\ldots(a_n - a_s)}.$$

Diese Summe, für welche Nägelsbach[2]) das Symbol

$$(a_1 \ldots a_n)^q$$

eingeführt hat, scheint hier in übersichtlicherer Form dargestellt zu sein, als bei Baltzer[3]), welcher für dieselbe die Relation

$$(a_1 \ldots a_n)^q = \frac{a_1{}^q}{f'a_1} + \ldots + \frac{a_s{}^q}{f'a_s} + \ldots + \frac{a_n{}^q}{f'a_n},$$

$$f_x = (x - a_1)\ldots(x - a_s)\ldots(x - a_n),$$

bewiesen hat.

So hat man z. B.

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 1 & 3 & 81 \\ 1 & 5 & 625 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{16}{(5-2)(3-2)} - \frac{81}{(5-3)(3-2)} + \frac{625}{(5-3)(5-2)}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{81}{2} + \frac{625}{6} = \frac{414}{6} = 69.$$

Die Funktion

$$(a_1 \ldots a_n)^q$$

könnte durch die Funktionalgleichung

$$(a_1 \ldots a_n)^q = (a_1 \ldots a_{n-1})^q + a_n (a_1 \ldots a_n)^{q-1}$$

definirt werden, deren Richtigkeit sofort aus der obigen Summenformel hervorgeht. Denn betrachtet man blos die allgemeinen Glieder, so ist ersichtlich

$$\frac{\pm a_s^q}{(a_s - a_1) \ldots (a_s - a_{s-1})(a_{s+1} - a_s) \ldots (a_n - a_s)}$$

$$= \frac{\mp a_s^{q-1}(a_n - a_s - a_n)}{(a_s - a_1) \ldots (a_s - a_{s-1})(a_{s+1} - a_s) \ldots (a_n - a_s)}$$

$$= \frac{a_s^q}{(a_s - a_1) \ldots (a_{n-1} - a_s)} \mp \frac{a_n a_s^{q-1}}{(a_s - a_1) \ldots (a_{n-1} - a_s)(a_n - a_s)}.$$

Vermittelst dieser Relation hat Nägelsbach (s. o.) die ganz allgemeine Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^m & a_1^p & \ldots & a_1^q \\ a_2^m & a_2^p & \ldots & a_2^q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^m & a_n^p & \ldots & a_n^q \end{vmatrix}$$

in eleganter Weise umgeformt.

§. 3. Unter den Determinanten von spezieller Form sind besonders wichtig die adjungirten Determinanten, welche folgendermassen definirt werden.

Es sei

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine beliebige Determinante; bildet man aus ihr die folgende

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_{11}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{1n}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{d\Delta}{da_{n1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{nn}} \end{vmatrix},$$

so sagt man, die Determinante Δ' sei der Determinante Δ adjungirt.

Dieser Ausdruck rührt ursprünglich von Gauss her, in seiner jetzigen Bedeutung aber von Cauchy (s. o. Kap. I. §. 10).

Multipliciren wir Δ mit Δ', so erhalten wir nach Kap. II. §. 20

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{1k}} a_{1k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{1k}} a_{2k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{1k}} a_{3k} & \cdots & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{1k}} a_{nk} \\ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{2k}} a_{1k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da^{2k}} a_{2k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{2k}} a_{3k} & \cdots & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{2k}} a_{nk} \\ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{3k}} a_{1k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{3k}} a_{2k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{3k}} a_{3k} & \cdots & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{3k}} a_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{nk}} a_{1k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{nk}} a_{2k} & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{nk}} a_{3k} & \cdots & \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta}{da_{nk}} a_{nk} \end{vmatrix}.$$

Jedes Element der ersten Diagonalreihe hat nun die Gestalt

$$\pm\, a_{i1} \frac{d\Delta}{da_{i1}} \mp a_{i2} \frac{d\Delta}{da_{i2}} \pm \cdots \pm a_{in} \frac{d\Delta}{da_{in}},$$

und jedes solche Aggregat stellt nach Kap. II. §. 13 die Determinante Δ selbst dar. Jedes beliebige andre Element dagegen ist von der Form

$$\pm\, a_{i1} \frac{d\Delta}{da_{l1}} \mp a_{i2} \frac{d\Delta}{da_{l2}} \pm \cdots \pm a_{in} \frac{d\Delta}{da_{ln}} = 0,$$

wie ebenfalls an jener Stelle bemerkt wurde. Es reducirt sich also (s. Kap. II. §. 5) die Determinante auf ihr Anfangsglied, und man hat

$$\Delta\Delta' = \Delta^n.$$

Diess liefert den wichtigen Lehrsatz:

Die adjungirte Determinante einer Determinante vom nten Grade ist die (n — 1)te Potenz der letzteren.

So haben wir z. B.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = \Delta' = \Delta^{2-1}.$$

Bilden wir die adjungirte Determinante von

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & d & 0 \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = adf + bce,$$

so ist dieselbe

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} d & o \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & e \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & b \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & b \\ d & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= ad(adf^2 + bcef) + bc(adef + bce^2) - bd(acef - acef)$$

$$= a^2d^2f^2 + 2abcdef + b^2c^2e^2$$

$$= \Delta^{3-1} = \Delta^2.$$

§. 4. Betrachten wir nunmehr eine beliebige Unterdeterminante Δ' der adjungirten Determinante, und zwar diejenige r te Unterdeterminante (n — r)ten Grades, deren Coëfficient in der Entwickelung der Determinante die (n — r)te Unterdeterminante r ten Grades

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_{pq}} & \frac{d\Delta}{da_{p\,q+r_1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p\,q+r_{n-1}}} \\ \frac{d\Delta}{da_{p+r_1\,q}} & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1 q+r_1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1 q+r_{n-1}}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\Delta}{da_{p+r_{n-1}q}} & \frac{d\Delta}{da_{p+r_{n-1}q+r_1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_{n-1}q+r_{n-1}}} \end{vmatrix}$$

ist. Dann haben wir nach Kap. II. §. 5

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_{st}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{s\,q-1}} & \frac{d\Delta}{da_{s\,q+1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{s\,q+r-1}^{n-1}} & \frac{d\Delta}{da_{sq}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{sn}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\Delta}{da_{p+r_1-1\,t}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1-1\,q-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1-1\,q+1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1-1\,q+r-1}^{n-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1-1\,q}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1-1\,n}} \\ \frac{d\Delta}{da_{p+r_1+1\,t}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1+1\,q-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1+1\,q+1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1+1\,q+r-1}^{n-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1+1\,q}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p+r_1+1\,n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Mit dieser Determinante multipliciren wir die folgende

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{st} & . & . & . & a_{sn} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1t} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{ut} & . & . & . & a_{un} \end{vmatrix},$$

welche gleich $\pm \Delta$ ist, je nachdem sie aus

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Reihenvertauschungen hervorgegangen ist.

Führt man die Multiplikation aus, so findet man

$$\Delta'\Delta'' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & . & . & a_{sq} & a_{sq+r_1} & . & . & a_{sq+r_{n-1}} \\ 0 & \Delta & 0 & . & . & a_{s+1\,q} & a_{s+1\,q+r_1} & . & . & a_{s+1\,q+r_{n-1}} \\ 0 & 0 & \Delta & . & . & a_{s+2\,q} & a_{s+2\,q+r_1} & . & . & a_{s+2\,q+r_{n-1}} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_{pq} & a_{p\,q+r_1} & . & . & a_{p\,q+r_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_{p+r_1\,q} & a_{p+r_1\,q+r_1} & . & . & a_{p+r_1\,q+r_{n-1}} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_{p+r_{n-1}\,q} & a_{p+r_{n-1}\,q+r_1} & . & . & a_{p+r_{n-1}\,q+r_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Dem Laplace'schen Determinantensatze zufolge ist dann

$$\Delta' = \pm \frac{1}{\Delta} \Delta^r \begin{vmatrix} a_{pq} & . & . & . & a_{p\,q+r_{n-1}} \\ . & . & . & . & . \\ a_{p+r_{n-1}\,q} & . & . & . & a_{p+r_{n-1}\,q+r_{n-1}} \end{vmatrix},$$

und wir haben so durch diese von Borchardt[4]) herrührende Entwickelung Folgendes bewiesen:

Jede rte Unterdeterminante N einer adjungirten Determinante ist gleich der (r − 1)ten Potenz der ursprünglichen, multiplicirt mit derjenigen Unterdeterminante der letztren, welche bei deren Entwickelung als Coëfficient von N auftritt.

§. 5. Es möge diess an der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

verdeutlicht werden. Von der Unterdeterminante zweiten Grades

$$\triangle' = \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{11}} & \frac{d\triangle}{da_{13}} \\ \frac{d\triangle}{da_{31}} & \frac{d\triangle}{da_{33}} \end{vmatrix}$$

ausgehend bilden wir das Produkt

$$\begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{11}} & \frac{d\triangle}{da_{13}} & \frac{d\triangle}{da_{12}} & \frac{d\triangle}{da_{14}} \\ \frac{d\triangle}{da_{31}} & \frac{d\triangle}{da_{33}} & \frac{d\triangle}{da_{32}} & \frac{d\triangle}{da_{34}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{1k}} a_{1k} & \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{1k}} a_{3k} & \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{1k}} a_{2k} & \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{1k}} a_{4k} \\ \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{3k}} a_{1k} & \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{3k}} a_{3k} & \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{3k}} a_{2k} & \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{3k}} a_{4k} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} & a_{42} \\ a_{14} & a_{34} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Da nun nach Kap. II. §. 13

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{mk}} a_{mk} = \triangle, \quad \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\triangle}{da_{nk}} a_{mk} = 0$$

ist, so erhalten wir

$$\triangle'\triangle = \triangle^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{42} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix}$$

in der geforderten Weise.

Mit Rücksicht auf diese Relationen kann man auch den zweiten, dritten . . . partiellen Differentialquotienten einer Determinante, genommen nach beliebigen Elementen, auf erste Differentialquotienten zurückführen. So hat man z. B., wenn

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist,

$$\begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{fi}} & \frac{d\triangle}{da_{fk}} & \frac{d\triangle}{da_{fl}} \\ \frac{d\triangle}{da_{gi}} & \frac{d\triangle}{da_{gk}} & \frac{d\triangle}{da_{gl}} \\ \frac{d\triangle}{da_{hi}} & \frac{d\triangle}{da_{hk}} & \frac{d\triangle}{da_{hl}} \end{vmatrix} = \frac{d\triangle}{da_{fi}} \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{gk}} & \frac{d\triangle}{da_{gl}} \\ \frac{d\triangle}{da_{hk}} & \frac{d\triangle}{da_{hl}} \end{vmatrix} - \frac{d\triangle}{da_{fk}} \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{gi}} & \frac{d\triangle}{da_{gl}} \\ \frac{d\triangle}{da_{hi}} & \frac{d\triangle}{da_{hl}} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{d\triangle}{da_{fl}} \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{gi}} & \frac{d\triangle}{da_{gk}} \\ \frac{d\triangle}{da_{hi}} & \frac{d\triangle}{da_{hk}} \end{vmatrix}$$

$$= \triangle^2 \frac{d^3 \triangle}{da_{fi}\ da_{gk}\ da_{hl}},$$

so dass demnach der dritte partielle Differentialquotient gleich dem Reciproken von $\triangle^2$, multiplicirt mit einem Aggregat von 6 Produkten aus ersten Differentialquotienten, wird. Diess lässt sich allgemein so aussprechen:

Jeder nte partielle Differentialquotient einer Determinante $\triangle$ kann dargestellt werden als ein mit dem Faktor

$$\triangle^{1-n}$$

multiplicirtes Aggregat von n! Gliedern, dessen Glieder je aus n ersten partiellen Differentialquotienten als Faktoren zusammengesetzt sind.

§. 6. Wir gehen nunmehr zu einer andren besondren Classe von Determinanten über, nämlich zu denjenigen, welche man symmetrisch nennt. Die Definition einer solchen Determinante ist bei Zugrundelegung unserer gewöhnlichen Bezeichnungsweise durch die Gleichung

$$a_{ki} = a_{ik}$$

gegeben, so dass also natürlich die Diagonalelemente a_{mm} willkürlich bleiben. Geometrisch können wir diess so ausdrücken: Eine Determinante ist dann symmetrisch, wenn jedem beliebigen Elemente

ein anderes ihm gleiches in der Weise zugeordnet werden kann, dass ihre Verbindungslinie von einer der beiden Diagonalen senkrecht halbirt wird. So sind etwa

$$\begin{vmatrix} a & f & k & n & p \\ f & b & g & l & q \\ k & g & c & h & m \\ n & l & h & d & i \\ p & q & m & i & e \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & b_1 \\ b_3 & a_3 & b_2 & c_1 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d_1 \end{vmatrix}$$

symmetrische Determinanten. Man erkennt sofort, dass jede Unterdeterminante einer solchen, deren Diagonalreihe ausschliesslich Elemente der früheren ersten bez. zweiten Diagonalreihe enthält, selbst wieder symmetrisch ist.

Eine symmetrische Determinante muss stets entstehen, wenn man eine ganz willkürliche Determinante in's Quadrat erhebt. So ist z. B. nach der Multiplikationsregel

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Thatsache lässt sich leicht ganz allgemein feststellen; denn setzen wir die durch Multiplikation einer Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit sich selbst entstehende neue Determinante

$$\triangle' = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

so ist ersichtlich

$$b_{ik} = a_{i1}\,a_{k1} + a_{i2}\,a_{k2} + \dots + a_{in}\,a_{kn},$$
$$b_{ki} = a_{k1}\,a_{i1} + a_{k2}\,a_{i2} + \dots + a_{kn}\,a_{in},$$

also

$$b_{ik} = b_{ki},$$

d. h. die Determinante $\triangle'$ ist symmetrisch.

Symmetrische Determinanten lassen häufig eine einfachere Darstellung in geschlossener Form zu, als gewöhnliche, insoferne nämlich verschiedene Glieder bei der Entwickelung sich in Eines zusammenziehen lassen.

Beispiel 1.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = adf - ae^2 - c^2d - b^2f + 2bce.$$

Beispiel 2.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

Beispiel 3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = (a + b - c)^2 - 4ab$$

$$= -(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\ (-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\ (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})\ (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}).$$

§. 7. Es wäre nahe, zu der Symmetrie einer Determinante noch irgend eine andre von deren Elementen zu erfüllende Bedingung hinzutreten zu lassen und zu untersuchen, welche Relationen sich daraus ergeben. Einige solche Fälle sollen jetzt untersucht werden.

Es werde zunächst angenommen, die Summen aller Elemente ein und derselben Zeile resp. Colonne verschwänden identisch. Dann ist zuerst ersichtlich, dass der Werth der ganzen Determinante selbst Null sein muss, indem durch gehörige Zusammenfassung aller Elemente ein und derselben Zeile resp. Colonne alle Elemente ein und derselben Colonne resp. Zeile durch Nullen ersetzt werden können. Ferner können wir aber über solche Determinanten noch folgendes aussagen:

Bestehen für die Elemente einer Determinante die beiden Relationen

$$a_{ik} = a_{ki}$$

und

$$\sum_{q=1}^{q=n} a_{iq} = 0,$$

so sind sämmtliche erste Unterdeterminanten derselben dem absoluten Werthe nach einander gleich [5]).

Betrachten wir zwei willkürlich ausgewählte dieser Unterdeterminanten, etwa

$$\frac{d\triangle}{da_{pq}} \text{ und } \frac{d\triangle}{da_{rs}},$$

so erhellt aus dem Begriffe einer symmetrischen Determinante sofort, dass sämmtliche Zeilen der einen mit sämmtlichen Colonnen der andren übereinstimmen müssen, eine einzige ausgenommen, diejenige nämlich, in welcher sich das dem Coëfficienten der Unterdeterminante gleiche Element befindet. Addirt man also zu den Elementen jener Zeile alle unter und über ihr stehenden, so reduciren sich diese Summen nach der zweiten aufgestellten Bedingung der Reihe nach auf die Elemente jener Colonne, d. h. die beiden Determinanten stimmen bis auf das Vorzeichen überein

Es sei z. B. in der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & f & k & n & q \\ f & b & g & l & p \\ k & g & c & h & m \\ n & l & h & d & i \\ q & p & m & i & e \end{vmatrix}$$

$$a + f + k + n + q = f + b + g + l + p = k + g + c + h + m$$
$$= n + l + h + d + i = q + p + m + i + e = 0.$$

Dann ist

$$-\begin{vmatrix} \bar{f} & \bar{k} & n & \bar{q} \\ g & c & h & m \\ l & h & d & i \\ p & q & i & e \end{vmatrix} = \frac{d\triangle}{df}, \quad \begin{vmatrix} a & \bar{k} & \bar{n} & \bar{q} \\ f & g & l & p \\ k & c & h & m \\ q & m & i & e \end{vmatrix} = \frac{d\triangle}{dl},$$

und man erkennt, dass die erste, zweite und vierte Colonne der ersten Determinante bezüglich mit der zweiten, dritten und vierten Zeile der zweiten identisch sind. Behandelt man die erste Zeile der letztren in der angedeuteten Weise, so bekommt man

$$\frac{d\triangle}{dl} = \begin{vmatrix} -n & -h & -d & -i \\ f & g & l & p \\ k & c & h & m \\ q & m & i & e \end{vmatrix},$$

und nun stimmt auch die dritte Colonne der ersten mit der ersten Zeile der zweiten Unterdeterminante überein, indem (— 1) als Faktor vortritt.

§. 8. Zu einer andren interessanten Unterabtheilung der

symmetrischen Determinanten gelangen wir durch folgende Definition Hankel's [6]):

Eine symmetrische Determinante wird orthosymmetrisch genannt, wenn die Relationen

$$a_{ik} = a_{i\mp q\ k\mp q}$$

oder

$$a_{ik} = a_{i+q\ k\mp q}$$

bestehen.

So sind beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_4 \\ e_6 & a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ g_7 & f_6 & a_1 & b_2 & c_3 \\ h_8 & g_7 & f_6 & a_1 & b_2 \\ i_9 & h_8 & g_7 & f_6 & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & a \\ 0 & b & 0 & a & d \\ b & 0 & a & d & 0 \\ 0 & a & d & 0 & e \\ a & d & 0 & e & f \end{vmatrix}$$

orthosymmetrische Determinanten des fünften Grades.

Diese Classe von Determinanten besitzt nun, wie Hankel [7]) gezeigt hat, eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft, welche in nachstehendem Theorem ausgesprochen ist:

Die orthosymmetrische Determinante der Grössen

$$a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots a_{2n-2}$$

ist stets gleich der orthosymmetrischen Determinante der obersten Differenzen

$$\triangle^{(0)},\ \triangle^{(1)},\ \triangle^{(2)} \ldots \triangle^{(2n-2)}$$

aus den $(2n-2)$ ersten Differenzenreihen der Terme a.

Wir legen zu Grunde die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

und subtrahiren jede Colonne von der zunächst rechts von ihr befindlichen. Dann folgt

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1-a_0 & a_2-a_1 & \ldots & a_{n-1}-a_{n-2} \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \ldots & a_n-a_{n-1} \\ a_2 & a_3-a_2 & a_4-a_3 & \ldots & a_{n+1}-a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n-a_{n-1} & a_{n+1}-a_n & \ldots & a_{2n-2}-a_{2n-3} \end{vmatrix}$$

In dieser Operation wird nun fortgefahren, so dass also immer die qte Colonne von der (q + 1)ten abgezogen wird, q > 1 vorausgetetzt. So erhält man

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1-a_0 & a_2-2a_1+a_0 & \dots & a_{n-1}-2a_{n-2}+a_{n-3} \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-2a_2+a_1 & \dots & a_n-2a_{n-1}+a_{n-2} \\ a_2 & a_3-a_2 & a_4-2a_3+a_2 & \dots & a_{n+1}-2a_n+a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n-a_{n-1} & a_{n+1}-2a_n+a_{n-1} & \dots & a_{2n-2}-2a_{2n-3}+a_{2n-4} \end{vmatrix}.$$

Ganz ebenso, wie bisher die Colonnen, behandeln wir von jetzt an die Zeilen; nach

$$n-1+n-2+\dots+3+2+1 = \frac{n}{2}(n+1)$$

Subtraktionen ergiebt sich dann zum Schluss:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1-a_0 & \dots & a_{n-1}-\binom{n-1}{1}a_{n-2}+\dots\mp\binom{n-1}{n-2}a_1\pm a_0 \\ a_1-a_0 & a_2-2a_1+a_0 & \dots & a_n-\binom{n}{1}a_{n-1}+\dots\pm\binom{n}{n-1}a_1\mp a_0 \\ a_2-2a_1+a_0 & a_3-3a_2+3a_1-a_0 & \dots & a_{n+1}-\binom{n+1}{1}a_n+\dots\mp\binom{n+1}{n}a_1\pm a_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}-\dots\pm a_0 & a_n-\dots\mp a_0 & \dots & a_{2n-2}-\binom{2n-2}{1}a_{2n-3}+\dots\pm\binom{2n-2}{2n-3}a_1\mp a_0 \end{vmatrix},$$

und diese Determinante ist ersichtlich wieder orthosymmetrisch. Man erkennt aber auch sofort, dass alle Glieder, deren Verbindungslinie der zweiten Diagonalreihe parallel läuft und das qte Element der ersten Zeile in sich begreift, dem Ausdrucke

$$a_{q-1}-\binom{q-1}{1}a_{q-2}+\dots\mp\binom{q-1}{q-2}a_1\pm a_0$$

gleich ist, und diess ist eben derjenige, welchen man in der Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung durch das Symbol $\triangle^{(q-1)}$ zu bezeichnen pflegt. Es ist also in der That

$$\triangle = \begin{vmatrix} \triangle^{(0)} & \triangle^{(1)} & \triangle^{(2)} & \dots & \triangle^{(n-1)} \\ \triangle^{(1)} & \triangle^{(2)} & \triangle^{(3)} & \dots & \triangle^{(n)} \\ \triangle^{(2)} & \triangle^{(3)} & \triangle^{(4)} & \dots & \triangle^{(n+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \triangle^{(n-1)} & \triangle^{(n)} & \triangle^{(n+1)} & \dots & \triangle^{(2n-2)} \end{vmatrix}.$$

Soll z B. die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 12 \\ 4 & 7 & 12 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 30 \end{vmatrix}$$

transformirt werden, so bildet man die Differenzenreihen

1 2 4 7 12 19 30

1 2 3 5 7 11

1 1 2 2 4

0 1 0 2

1 −1 2

−2 3

5

und kann dann setzen

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

§. 9. Der Nutzen dieses Lehrsatzes ist ein sehr mannigfaltiger. Sind die Elemente einer orthosymmetrischen Determinante theilweise Glieder einer arithmetischen Progression, so verschwinden von einer bestimmten Stelle ab sämmtliche Differenzen, und man erhält die Determinante bedeutend vereinfacht. Nehmen wir an, es seien (2n—1) Terme in aufsteigender Ordnung gegeben, zwischen denen eine arithmetische Progression n ter Ordnung besteht, so werden offenbar (n—1) der Diagonalreihe parallele Elementen-Serien nach der Transformation der Determinante in Folge des Hankel'schen Lehrsatzes durch Nullen ersetzt sein und wir können so diesem letztren folgendes nicht uninteressante Corollar anreihen:

Eine orthosymmetrische Determinante verschwindet identisch, wenn die Anzahl der darin vorkommenden Elemente $2n - 1$ ist und dieselben Glieder einer arithmetischen Reihe sind, deren Ordnungszahl

$$\leqq n - 1$$

ist; sie reducirt sich auf eine nte Potenz, wenn diese ihre Ordnungszahl $= n$ ist (Kap. II. §. 5).

So hat man z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \\ 27 & 64 & 125 & 216 \\ 64 & 125 & 216 & 343 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 11 & 6 \\ 7 & 11 & 6 & 0 \\ 11 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6^4.$$

Ferner erkennt man an der orthosymmetrischen Determinante noch eine andre Eigenschaft [8]). Wir wollen nämlich annehmen, jedes Element mit niedrigerem Index gehe in jedem einzelnen mit höherem Index ohne Rest auf, es sei also allgemein

$$a_k = \alpha_0 \, \alpha_1 \, \alpha_2 \, \ldots \, \alpha_{k-1} \, \alpha_k .$$

Führen wir diese Substitutionen durch, so zeigt sich, dass allgemein die Elemente der q ten Zeile den Ausdruck

$$\alpha_0 \, \alpha_1 \, \ldots \, \alpha_{q-1}$$

als gemeinschaftlichen Faktor besitzen. Zieht man alle diese Faktoren heraus, so bleibt noch übrig

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_0^{n} \, \alpha_1^{n-1} \ldots \alpha_{n-2}^{2} \, \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & \ldots & \alpha_1\alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 & \ldots & \alpha_2\alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3\alpha_4 & \ldots & \alpha_3\alpha_4 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n\alpha_{n+1} & \ldots & \alpha_n\alpha_{n+1} & \ldots & \alpha_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Hieraus resultirt auch eine Thatsache, auf welche ebensowenig wie auf die oben bewiesne analoge bisher aufmerksam geworden zu sein scheint, und die wir so aussprechen können:

Eine orthosymmetrische Determinante verschwindet identisch, wenn ihre Elemente in geometrischer Progression stehen.

So wäre dem Obigen zufolge

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 16 & 32 & 64 \\ 16 & 32 & 64 & 128 \end{vmatrix} = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \end{vmatrix},$$

und diese Determinante muss den Werth Null haben, weil ihre sämmtlichen Zeilen und Colonnen einander bezüglich gleich sind.

§. 10. Es möge hier auch noch auf eine andre Classe von orthosymmetrischen Determinanten hingewiesen werden, welche v. Zeipel [9]) aufgefunden hat. Wir betrachten folgende Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \binom{m}{p+2} & \cdots & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \binom{m+1}{p+2} & \cdots & \binom{m+1}{p+r} \\ \binom{m+2}{p} & \binom{m+2}{p+1} & \binom{m+2}{p+2} & \cdots & \binom{m+2}{p+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+r-1}{p} & \binom{m+r-1}{p+1} & \binom{m+r-1}{p+2} & \cdots & \binom{m+r-1}{p+r} \\ \binom{m+r}{p} & \binom{m+r}{p+1} & \binom{m+r}{p+2} & \cdots & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix},$$

wobei in bekannter Weise der Binomialcoëfficient

$$\frac{m(m-1) \ldots (m-p+1)(m-p)}{p!} = \binom{m}{p}$$

gesetzt wurde. Indem wir die jedem Elemente ein und derselben Zeile gemeinschaftlichen Faktoren heraussetzen, ergiebt sich uns

$$\triangle = \frac{m(m+1)\ldots(m+r)}{p(p+1)\ldots(p+r)} \begin{vmatrix} \binom{m-1}{p-1} & \binom{m-1}{p} & \binom{m-1}{p+1} & \cdots & \binom{m-1}{p+r-1} \\ \binom{m}{p-1} & \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \cdots & \binom{m}{p+r-1} \\ \binom{m+1}{p-1} & \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \cdots & \binom{m+1}{p+r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+r-2}{p-1} & \binom{m+r-2}{p} & \binom{m+r-2}{p+1} & \cdots & \binom{m+r-2}{p+r-1} \\ \binom{m+r-1}{p-1} & \binom{m+r-1}{p} & \binom{m+r-1}{p+1} & \cdots & \binom{m+r-1}{p+r-1} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir $\triangle = v_{m\,p}$, so ist die so eben erhaltene neue Determinante der Analogie gemäss $= v_{m-1\,p-1}$, und es besteht die Gleichung

$$v_{mp} = \frac{m(m+1)\ldots(m+r)}{p(p+1)\ldots(p+r)}\, v_{m-1\,p-1} = \frac{\binom{m+r}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}}\, v_{m-1\,p-1}.$$

Auf diese Weise können wir folgendes System binomischer recurrirender Gleichungen bilden:

$$v_{m-1\,p-1} = \frac{\binom{m+r-1}{r+1}}{\binom{p+r-1}{r+1}}\, v_{m-2\,p-2}$$

$$v_{m-2\,p-2} = \frac{\binom{m+r-2}{r+1}}{\binom{p+r-2}{r+1}}\, v_{m-3\,p-3}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$v_{m-p+1\,1} = \frac{\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{r+1}{r+1}}\, v_{m-p\,0}.$$

Indem man diese Gleichungen sämmtlich mit einander multiplicirt, erhält man

$$v_{mp} = \frac{\binom{m+r}{r+1}\binom{m+r-1}{r+1}\binom{m+r-2}{r+1}\cdots\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1}\binom{p+r-2}{r+1}\cdots\binom{r+1}{r+1}} v_{m-p\ 0},$$

so dass also nur die Bestimmung dieses letztren Termes noch übrig bleibt. Nun ist aber

$$v_{m-p\ 0} = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{r} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{2} & \cdots & \binom{m+1}{r} \\ \binom{m+2}{0} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+2}{2} & \cdots & \binom{m+2}{r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+r}{0} & \binom{m+r}{1} & \binom{m+r}{2} & \cdots & \binom{m+r}{r} \end{vmatrix}.$$

Subtrahirt man hier jede Zeile von der unter ihr stehenden und erinnert sich der bekannten Formel

$$\binom{m+k}{q} - \binom{m+k-1}{q} = \binom{m+k-1}{q-1},$$

so ersieht man, dass sämmtliche Elemente der ersten Diagonalreihe die Gestalt

$$\binom{m+k}{0} = \binom{m+r}{0} = 1$$

annehmen, während alle links von dieser Reihe stehenden Elemente verschwinden. Es ist also

$$v_{m-p\ 0} = 1^{r+1} = 1.$$

Sehen wir nun zu, wie eine orthosymmetrische Determinante, deren Elemente aufeinanderfolgende Binomialcoëfficienten sind, sich in geschlossner Form darstellen lässt. Wir gehen zur Determinante

$$v_{mp}$$

zurück und subtrahiren von jeder Zeile die zunächst über ihr stehende. Um uns über das hiebei zu erwartende Resultat zu vergewissern, haben wir nur die beiden Elemente

$$\binom{m+r-q-1}{p+s-1} \text{ und } \binom{m+r-q}{p+s}$$

in's Auge zu fassen. Das senkrecht unter dem zweiten befindliche Element wird sein

$$\binom{m+r-q-1}{p+s},$$

und die Subtraktion liefert

$$\binom{m+r+q}{p+s} - \binom{m-r-q-1}{p+s} = \binom{m+r-q-1}{p+s-1)}.$$

Da aber q und s willkürliche Zahlen sind, so erhellt, dass zwei Elemente, deren Verbindungslinie der ersten Diagonalreihe parallel ist, einander gleich werden, mit andren Worten, die resultirende Determinante ist orthosymmetrisch. Fassen wir das Gesagte zusammen, so erhalten wir nachstehenden eleganten Satz:

Die orthosymmetrische Determinante (r + 1)ten Grades

$$\begin{vmatrix}
\binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \binom{m}{p+2} & \cdots & \binom{m}{p+r} \\
\binom{m}{p-1} & \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \cdots & \binom{m}{p+r-1} \\
\binom{m}{p-2} & \binom{m}{p-1} & \binom{m}{p} & \cdots & \binom{m}{p+r-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\binom{m}{p-r+1} & \binom{m}{p-r+2} & \binom{m}{p-r+3} & \cdots & \binom{m}{p+1} \\
\binom{m}{p-r} & \binom{m}{p-r+1} & \binom{m}{p-r+2} & \cdots & \binom{m}{p}
\end{vmatrix}$$

ist gleich dem Bruche

$$\frac{\binom{m+r}{r+1}\binom{m+r-1}{r+1}\cdots\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1}\cdots\binom{r+1}{r+1}}.$$

Wird p = 1, so geht der Bruch in den Ausdruck

$$\binom{m+r}{r+1}$$

über, und man hat somit alsdann diesen Binomialcoëfficienten in der Gestalt einer orthosymmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots & \binom{m}{r+1} \\ \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{r} \\ 0 & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{m}{1} \end{vmatrix}$$

dargestellt.

§. 11. Im Anschluss an die bisherigen Betrachtungen möge noch eine spezielle Form der orthosymmetrischen Determinanten untersucht werden, deren Zurückführung auf geschlossne Ausdrücke sich besonders einfach gestaltet. Es ist diess die folgende:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-5} & a_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}.$$

welche, einer Angabe von Zehfuss [10]) zufolge, bereits von Bessel bemerkt wurde. Hiernach wäre die Angabe von Baltzer [11]) zu berichtigen, wonach die Spezialgeschichte dieser Determinante sich nicht bis zu einer bestimmten Persönlichkeit verfolgen liesse. Das Charakteristische an derselben ist, dass in jeder Zeile und Colonne die nämlichen n Elemente in verschiedener Reihenfolge vorkommen; sie tritt mehrfach [12]) bei zahlentheoretischen Untersuchungen auf.

Die Auswerthung dieser Determinante, welche wir als doppelt-orthosymmetrische bezeichnen wolllen, hat Stern [13]) in folgender höchst einfacher Weise bewerkstelligt.

Man bildet die bekannten Gleichungen (Kap. II. §. 14)

$$a_0 \frac{d\triangle}{da_0} + a_1 \frac{d\triangle}{da_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\triangle}{da_{n-1}} = \triangle,$$
$$a_0 \frac{d\triangle}{da_1} + a_1 \frac{d\triangle}{da_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\triangle}{da_0} = 0,$$
$$a_0 \frac{d\triangle}{da_2} + a_1 \frac{d\triangle}{da_3} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\triangle}{da_1} = 0,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_0 \frac{d\triangle}{da_{n-1}} + a_1 \frac{d\triangle}{da_0} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\triangle}{da_{n-2}} = 0$$

und addirt dieselben. So erhält man

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) \left(\frac{d\triangle}{da_0} + \frac{d\triangle}{da_1} + \ldots + \frac{d\triangle}{da_{n-1}} \right) = \triangle.$$

Dem linksstehenden Ausdrucke kann man aber, wenn α irgend eine Wurzel der positiven Einheit bedeutet, auch diesen substituiren:

$$(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\,\alpha^{n-1}) \left(\frac{d\triangle}{da_0} + \frac{d\triangle}{da_1}\alpha^{n-1} + \ldots + \frac{d\triangle}{da_{n-1}}\alpha \right);$$

denn die Ausrechnung zeigt, dass der Coëfficient von

$$\alpha^{k-1}$$

für $k \gtrless 1$ verschwindet und für $k = 1$ den obigen Ausdruck wiedergiebt. Es muss also das Aggregat

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\,\alpha^{n-1}$$

in $\triangle$ als Faktor enthalten sein, und da an Stelle von α jede Potenz dieser Grösse treten darf, so muss $\triangle$ dem Produkte

$$\lambda\,(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\,\alpha^{n-1}) \times$$
$$(a_0 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha^4 + \ldots + a_{n-1}\,\alpha^{2(n-1)}) \times$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$$

gleich sein, unter λ einen linearen Faktor verstanden. Um diesen zu bestimmen, brauchen wir nur einen speziellen Fall, etwa

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_1^2 = (a_0 - a_1)\,(a_0 + a_1),$$

zu betrachten, welcher sofort $\lambda = 1$ liefert.

Analysiren wir so die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x \end{vmatrix},$$

so finden wir dieselbe gleich dem Produkte

$$(x + y) \cdot \left[x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) y\right] \times$$

$$\left[x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} - \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) y\right] \times$$

$$\left[x + \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right) y\right] \times$$

$$\left[x + \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)\right]$$

$$= x^5 + y^5,$$

wie schon der Anblick der Determinante lehrt.

§. 12. Bei den symmetrischen Determinanten, mit welchen wir uns in den letzten fünf Paragraphen ausschliesslich beschäftigten, war

$$a_{ik} = a_{ki};$$

wir können nun aber ohne Zweifel auch Determinanten, wie beispielsweise die nachstehende

$$\begin{vmatrix} m & -b & -f & -k & -t \\ b & n & -c & -g & -l \\ f & c & p & -d & -h \\ k & g & d & r & -e \\ t & l & h & e & s \end{vmatrix}$$

bilden, für welche

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

ist; die Diagonalglieder werden durch diese Festsetzung nicht alterirt.

Eine Determinante dieser Art nannten die französischen und englischen Mathematiker, welche zuerst solche Formen in Betracht zogen, „déterminant gauche symétrique“, die Italiener „determinante gobbo.“ In Deutschland ist hier und da wohl der Name Ueberschlagene Determinanten in Gebrauch; wir

jedoch werden uns im Folgenden der anscheinend von Natani [14]) herrührenden Terminologie anschliessen und stellen als Definition auf:

Sind zwei symmetrisch liegende Elemente einer Determinante einander entgegengesetzt gleich, so nennen wir eine solche Determinante eine symmetrale. Enthält die eine Diagonalreihe willkürliche Grössen, so sagt man, die Determinante habe eine volle, enthält sie ausschliesslich Nullen, sie habe eine leere Diagonale.

Von solchen Gebilden gilt zunächst folgender in den Lehrbüchern nicht enthaltene Satz:

Ersetzt man durch geeignete Operationen zwei symmetrisch gelegne Elemente einer symmetralen Determinante mit leerer Diagonale durch Nullen, so verliert hiedurch dieselbe ihren Charakter nicht, jedoch ist vor dieselbe ein quadratischer Faktor herausgetreten.

Diess brauchen wir nur an einem Beispiele zu zeigen, indem der allgemeine Fall sich ganz analog erledigt. Es sei gegeben

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{34} \\ a_{11} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad a_{ii} = 0,$$

und die beiden Elemente

$$a_{23} \text{ und } -a_{23}$$

sollen zum Verschwinden gebracht werden. Zu diesem Zwecke multiplicirt man die erste Zeile mit a_{23}, die zweite mit a_{13} und subtrahirt erstre von letztrer; ebenso verfährt man bezüglich mit der ersten und zweiten Colonne und findet so

$$\triangle = \frac{1}{a^2_{13}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12}a_{13} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{12}a_{13} & 0 & 0 & -a_{24}a_{13}+a_{14}a_{23} \\ a_{13} & 0 & 0 & -a_{34} \\ a_{11} & a_{24}a_{13}-a_{14}a_{23} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

Hiemit ist der Satz bewiesen.

Im unmittelbaren Anschluss daran beweisen wir alsdann folgendes höchst wichtige Theorem:

Jede symmetrale Determinante geraden Grades mit leerer Diagonale ist ein vollständiges Quadrat.

Sei gegeben folgende Determinante 2n ten Grades:

$$\triangle = \begin{vmatrix}
0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1\,n-1} & -a_{1n} & -a_{1\,n+1} & \cdots & -a_{1\,2n-2} & -a_{1\,2n-1} & -a_{1\,2n} \\
a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2\,n-1} & -a_{2n} & -a_{2\,n+1} & \cdots & -a_{2\,2n-2} & -a_{2\,2n-1} & -a_{2\,2n} \\
a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3\,n-1} & -a_{3n} & -a_{3\,n+1} & \cdots & -a_{3\,2n-2} & -a_{3\,2n-1} & -a_{3\,2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1\,n-1} & a_{2\,n-1} & a_{3\,n-1} & \cdots & 0 & -a_{n-1\,n} & -a_{n-1\,n+1} & \cdots & -a_{n-1\,2n-2} & -a_{n-1\,2n-1} & -a_{n-1\,2n} \\
a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{n-1\,n} & 0 & -a_{n\,n+1} & \cdots & -a_{n\,2n-2} & -a_{n\,2n-1} & -a_{n\,2n} \\
a_{1\,n+1} & a_{2\,n+1} & a_{3\,n+1} & \cdots & a_{n-1\,n+1} & a_{n\,n+1} & 0 & \cdots & -a_{n+1\,2n-2} & -a_{n+1\,2n-1} & -a_{n+1\,2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1\,2n-1} & a_{2\,2n-2} & a_{3\,2n-2} & \cdots & a_{n-1\,2n-2} & a_{n\,2n-2} & a_{n+1\,2n-2} & \cdots & 0 & -a_{2n-2\,2n-1} & -a_{2n-2\,2n} \\
a_{1\,2n-1} & a_{2\,2n-1} & a_{3\,2n-1} & \cdots & a_{n-1\,2n-1} & a_{n\,2n-1} & a_{n+1\,2n-1} & \cdots & a_{2n-2\,2n-1} & 0 & -a_{2n-1\,2n} \\
a_{1\,2n} & a_{2\,2n} & a_{3\,2n} & \cdots & a_{n-1\,2n} & a_{n\,2n} & a_{n+1\,2n} & \cdots & a_{2n-2\,2n} & a_{2n-1\,2n} & 0
\end{vmatrix}$$

Die Transformationen, welchen wir diese Determinante unterwerfen wollen, sind nun folgende. Man lasse in der so eben skizzirten Weise successive die Elemente

$$a_{2\,n+1},\ -a_{2\,n+1};\ a_{3\,n+1},\ -a_{3\,n+1}\ \ldots\ a_{n\,n+1},\ -a_{n\,n+1}$$

verschwinden, indem man stets bezüglich die erste Colonne und Zeile als Subtrahenden verwendet. In gleicher Weise sollen hierauf die Elementenreihen

$$a_{3\,n+2},\ -a_{3\,n+2};\ a_{4\,n+2},\ -a_{4\,n+2}\ \ldots\ a_{n+1\,n+2},\ -a_{n+1\,n+2}$$

annullirt werden, nur dass jetzt an Stelle der ersten Zeile und Colonne die zweite zu treten hat. In dieser Weise wird fortgefahren, bis schliesslich auch die Elementenreihen

$$a_{n+1\,2n},\ -a_{n+1\,2n};\ a_{n+2\,2n},\ -a_{n+2\,2n}\ \ldots\ a_{2n-1\,2n},\ -a_{2n-1\,2n}$$

durch Nullen ersetzt sind; durch all diese Operationen hat die Determinante dem Obigen gemäss den Faktor

$$M = \frac{1}{(A_{1\,n+1}\ .\ A_{2\,n+2}\ .\ A_{3\,n+3}\ \ldots\ A_{n\,2n})^{2(n-1)}}$$

erhalten, indem man schliesslich allgemein durch

$$A_{ik}$$

das bezeichnet, was in Folge der vorgenommenen Umänderungen aus a_{ik} geworden ist. So ist nun

$$\triangle = M. \begin{vmatrix} 0 & -A_{12} & -A_{13} & \cdots & -A_{1\,n-1} & -A_{1n} & A_{1\,n+1} & \cdots & -A_{1\,2n-2} & -A_{1\,2n-1} & -A_{1\,2n} \\ A_{12} & 0 & -A_{23} & \cdots & -A_{2\,n-1} & -A_{2n} & 0 & \cdots & -A_{2\,2n-2} & -A_{2\,2n-1} & -A_{2\,2n} \\ A_{13} & A_{23} & 0 & \cdots & -A_{3\,n-1} & -A_{3n} & 0 & \cdots & -A_{3\,n-2} & -A_{3\,2n-1} & -A_{3\,2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1\,n-1} & A_{2\,n-1} & A_{3\,n-1} & \cdots & 0 & -A_{n-1\,n} & 0 & \cdots & 0 & -A_{n-1\,2n-1} & -A_{n-1\,2n} \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{n-1\,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -A_{n\,2n} \\ A_{1\,n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1\,2n-2} & A_{2\,n-2} & A_{3\,2n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_{1\,2n-1} & A_{2\,2n-1} & A_{3\,2n-1} & \cdots & A_{n-1\,2n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_{1\,2n} & A_{2\,n2} & A_{3\,2n} & \cdots & A_{n-1\,2n} & A_{n\,2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} * 7$$

geworden. Auf diese letztre Determinante lässt sich sofort der Laplace'sche Determinantensatz anwenden, und es ergiebt sich

$$\triangle = M \cdot \begin{vmatrix} -A_{1\,n+1} & -A_{1\,n+2} & \cdots & -A_{1\,2n-1} & -A_{1\,2n} \\ 0 & -A_{2\,n+2} & \cdots & -A_{2\,2n-1} & -A_{2\,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -A_{n-1\,2n-1} & -A_{n-1\,2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_{n\,2n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{1\,n+1} & A_{1\,n+2} & \cdots & A_{1\,2n-1} & A_{1\,2n} \\ 0 & A_{2\,n+2} & \cdots & A_{2\,2n-1} & A_{2\,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n-1\,2n-1} & A_{n-1\,2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n\,2n} \end{vmatrix}.$$

Setzt man für M seinen Werth ein und zieht Kap. II. §. 5 in Betracht, so erhält man als Schlussresultat

$$\triangle = (-1)^n \frac{(A_{1\,n+1} \cdot A_{2\,n+2} \cdot \ldots \cdot A_{n-1\,2n-1} \cdot A_{n\,2n})^2}{(A_{1\,n+1} \cdot A_{2\,n+2} \cdot \ldots \cdot A_{n-1\,2n-1} \cdot A_{n\,2n})^{2n-2}}$$

$$= (-1)^n (A_{1\,n+1} \cdot A_{2\,n+2} \cdot \ldots \cdot A_{n-1\,2n-1} \cdot A_{n\,2n})^{-2n};$$

also ist $\triangle$ ein vollkommenes Quadrat.

Behandelt man in dieser Weise die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a & -d & -f \\ a & 0 & -b & -e \\ d & b & 0 & -c \\ f & e & c & 0 \end{vmatrix},$$

so ist zunächst

$$\triangle = \frac{1}{d^2} \begin{vmatrix} 0 & -ad & -d & -f \\ ad & 0 & 0 & -de+bf \\ d & 0 & 0 & -c \\ f & de-bf & c & 0 \end{vmatrix},$$

und weiterhin

$$\triangle = \frac{1}{d^2(de-bf)^2}\begin{vmatrix} 0 & -ad & -d(de-bf)+acd & -f \\ ad & 0 & 0 & -de+bf \\ d(de-bf)-acd & 0 & 0 & 0 \\ f & de-bf & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

woraus sich schliesslich

$$\triangle = \frac{[d\,(de-bf) - acd]^2\ (de-bf)^2}{d^2\ (de-bf)^2} = (de-bf-ac)^2$$

ergiebt.

Nehmen wir nunmehr an, die Determinante sei von einem ungeraden, etwa vom $(2n+1)$ten Grade. Vollziehen wir mit ihr die nämlichen Operationen, wie mit der bisher betrachteten, so können wir es offenbar dahin bringen, dass

$$n(n+1)$$

ein Rechteck bildende Elemente verschwinden. Nach Kap. II. §. 18 erhellt also:

Jede symmetrale Determinante ungeraden Grades mit leerer Diagonale hat den Werth Null.

Diess lässt sich auch auf andrem Wege leicht zeigen; denn multiplicirt man eine solche Determinante $(2n+1)$ten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1\,2n-1} & -a_{1\,2n} & -a_{1\,2n+1} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2\,2n-1} & -a_{2\,2n} & -a_{2\,2n+1} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3\,2n-1} & -a_{3\,2n} & -a_{3\,2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1\,2n-1} & a_{2\,2n-1} & a_{3\,2n-1} & \cdots & 0 & -a_{2n-1\,2n} & -a_{2n-1\,2n+1} \\ a_{1\,2n} & a_{2\,2n} & a_{3\,2n} & \cdots & a_{2n-1\,2n} & 0 & -a_{2n\,2n+1} \\ a_{1\,2n+1} & a_{2\,2n+1} & a_{3\,2n+1} & \cdots & a_{2n-1\,2n+1} & a_{2n\,2n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

mit (-1), so erhält man

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,2n-1} & a_{1\,2n} & a_{1\,2n+1} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2\,2n-1} & a_{2\,2n} & a_{2\,2n+1} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3\,2n-1} & a_{3\,2n} & a_{3\,2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1\,2n-1} & -a_{2\,2n-1} & -a_{3\,2n-1} & \cdots & 0 & a_{2n-1\,2n} & a_{2n-1\,2n+1} \\ -a_{1\,2n} & -a_{2\,2n} & -a_{3\,2n} & \cdots & -a_{2n-1\,2n} & 0 & a_{2n\,2n+1} \\ -a_{1\,2n+1} & -a_{2\,2n+1} & -a_{3\,2n+1} & \cdots & -a_{2n-1\,2n+1} & -a_{2n\,2n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\Delta.$$

Es ist also

$$\Delta = \Delta' = -\Delta = 0.$$

§. 13. Der Ausdruck, dessen Quadrat eine symmetrale Determinante geraden Grades ist, wurde von Jacobi [15]) in die Wissenschaft eingeführt und von Cayley, wegen seiner Verwendung bei dem mit Pfaff's Namen belegten Integrationsproblem, als „the Pfaffian“ (scil. fonction) bezeichnet. Der obige Satz wurde von Cayley [16]) aufgefunden und bewiesen; in einfacherer und kürzerer Weise von Borchardt [17]). Zwei andre Beweise rühren von Scheibner [18]) und Veltmann [19]) her, und diese letztren Beweise bieten den Vortheil, aus sich heraus eine Darstellung jener Pfaff'schen Funktion — Scheibner (a. a. O.) nennt sie Halbdeterminante — herleiten zu lassen. Auch der von uns gelieferte Beweis würde eine solche Darstellung ermöglichen; indess kann hier auf diesen Gegenstand nicht näher eingegangen werden. Nur an einem einfachen bisher wohl wenig beachteten Spezialfall möge die — in diesem Falle independente — Bestimmung einer solchen Halbdeterminante ausgeführt werden.

Die zu untersuchende Determinante sei so gebildet, dass ihre Elemente nicht blos gegen die eine sondern gegen die andre Diagonale symmetrisch liegen, wie diess bei

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha & -\beta & \dots & -\delta & -\varepsilon & -\zeta & -\eta & \dots & -\pi & -\varrho & -\sigma \\ \alpha & 0 & -\gamma & \dots & -\vartheta & -\iota & -\varkappa & -\lambda & \dots & -\tau & -\upsilon & -\varrho \\ \beta & \gamma & 0 & \dots & -\mu & -\nu & -\xi & -\sigma & \dots & -\chi & -\tau & -\pi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta & \vartheta & \mu & \dots & 0 & -\mathrm{x} & -\mathrm{z} & -\mathrm{u} & \dots & -\varsigma & -\lambda & -\eta \\ \varepsilon & \iota & \nu & \dots & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{y} & -\mathrm{z} & \dots & -\xi & -\varkappa & -\zeta \\ \zeta & \varkappa & \xi & \dots & \mathrm{z} & \mathrm{y} & 0 & -\mathrm{x} & \dots & -\nu & -\iota & -\varepsilon \\ \eta & \lambda & \varsigma & \dots & \mathrm{u} & \mathrm{z} & \mathrm{x} & 0 & \dots & -\mu & -\vartheta & -\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi & \tau & \chi & \dots & \varsigma & \xi & \nu & \mu & \dots & 0 & -\gamma & -\beta \\ \varrho & \upsilon & \tau & \dots & \lambda & \varkappa & \iota & \vartheta & \dots & \gamma & 0 & -\alpha \\ \sigma & \varrho & \pi & \dots & \eta & \zeta & \varepsilon & \delta & \dots & \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

der Fall ist. Die eingeklammerte Unterdeterminante ist vom n ten, die Determinante selbst vom 2n ten Grade. Addirt man jetzt zur qten die (n − q + 1)te Zeile und ebenso zur qten Colonne die (n — q + 1)te, wobei die ganze Zahl

$$\mathrm{q} \geqq 1 \leqq \mathrm{n}$$

zu nehmen ist, so findet man

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon\text{-}\zeta & \delta\text{-}\eta & \dots & \beta\text{-}\pi & \alpha\text{-}\varrho & -\sigma \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \iota\text{-}\varkappa & \vartheta\text{-}\lambda & \dots & \gamma\text{-}\tau & -\upsilon & -\alpha\text{-}\varrho \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \nu\text{-}\xi & \mu\text{-}\varsigma & \dots & -\chi & -\gamma\text{-}\tau & -\beta\text{-}\pi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathrm{x}\text{-}\mathrm{z} & -\mathrm{u} & \dots & -\mu\text{-}\varsigma & -\vartheta\text{-}\lambda & -\eta\text{-}\sigma \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\mathrm{y} & -\mathrm{x}\text{-}\mathrm{z} & \dots & -\nu\text{-}\xi & -\iota\text{-}\varkappa & -\varepsilon\text{-}\zeta \\ \zeta\text{-}\varepsilon & \varkappa\text{-}\iota & \xi\text{-}\nu & \dots & \mathrm{z}\text{-}\mathrm{x} & \mathrm{y} & 0 & -\mathrm{x} & \dots & -\nu & -\iota & -\varepsilon \\ \eta\text{-}\sigma & \lambda\text{-}\vartheta & \varsigma\text{-}\mu & \dots & \mathrm{u} & \mathrm{x}+\mathrm{z} & -\mathrm{y} & 0 & \dots & -\mu & -\vartheta & -\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi\text{-}\beta & \tau\text{-}\gamma & \chi & \dots & \mu+\varsigma & \nu+\xi & \nu & \mu & \dots & 0 & -\gamma & -\beta \\ \varrho\text{-}\alpha & \upsilon & \gamma+\tau & \dots & \vartheta+\lambda & \iota+\varkappa & \iota & \vartheta & \dots & \gamma & 0 & -\alpha \\ \sigma & \alpha+\varrho & \beta+\pi & \dots & \eta+\sigma & \varepsilon+\zeta & \varepsilon & \delta & \dots & \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix},$$

Durch Anwendung des Satzes von Laplace folgt hieraus

$$\triangle = (-1)^{\mathrm{n}} \left(\begin{vmatrix} \varepsilon-\zeta & \delta-\eta & \dots & \beta-\pi & \alpha-\varrho & -\sigma \\ \iota-\varkappa & \vartheta-\lambda & \dots & \gamma-\tau & -\upsilon & -\alpha-\varrho \\ \nu-\xi & \mu-\varsigma & \dots & -\chi & -\gamma-\tau & -\beta-\pi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{x}-\mathrm{z} & -\mathrm{u} & \dots & -\mu-\varsigma & -\delta-\lambda & -\eta-\delta \\ -\mathrm{y} & -\mathrm{x}-\mathrm{z} & \dots & -\nu-\xi & -\iota-\varkappa & -\varepsilon-\zeta \end{vmatrix} \right)^2.$$

Gehen wir nunmehr zu den symmetralen Determinanten mit voller Diagonale über.

§. 14. Gegeben sei eine symmetrale Determinante geraden Grades, jedoch mit der Bestimmung, dass das allgemeine Diagonal-Element

$$a_{n\,n}$$

einer willkürlichen Grösse z gleich sei. Alsdann können wir auf einen früher (Kap. II. §. 19) bewiesenen Satz zurückgreifen, vermittelst dessen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+z & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn}+z \end{vmatrix}$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von z fortlaufende Reihe entwickelten. In unsrem Fall ist jetzt

$$a_{nn} = 0,\ a_{ik} = -a_{ki},$$

und hiedurch treten gewisse Vereinfachungen ein. Den Coëfficienten des Gliedes

$$z^q$$

erhielten wir dadurch, dass wir das Aggregat all derjenigen q ten Unterdeterminanten des (n - q)ten Grades bildeten, deren Diagonalglied ein Theil des Diagonalgliedes der ursprünglichen Determinante war. Diese Unterdeterminanten sind nun aber hier sämmtlich symmetrale Determinanten mit leerer Diagonale; sie verschwinden, wenn (n — q) ungerade ist, und sie ergeben vollständige Quadrate, wenn (n — q) gerade ist. Diess zusammengenommen, können wir folgenden Satz formuliren:

Eine symmetrale Determinante mit voller Determinante lässt sich als eine nach geraden oder ungeraden Potenzen des Diagonal-Elementes fortlaufende Reihe darstellen, je nachdem der Grad n der Determinante eine gerade oder ungerade Zahl ist, und zwar ist der Coëfficient eines jeden Gliedes eine Summe von Quadraten.

Soll z. B. die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} z & -a & -b & -c \\ a & z & -d & -e \\ b & d & z & -f \\ c & e & f & z \end{vmatrix}$$

ausgewerthet werden, so erhält man

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{vmatrix} + z\left[\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -d \\ b & d & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -f \\ c & f & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -a & -c \\ a & 0 & -e \\ c & e & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -d & -e \\ d & 0 & -f \\ e & f & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$+ z^2\left[\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{vmatrix}\right] + z^3\,(0 + 0 + 0 + 0) + z^4$$

$$= (af + be + cd)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)\,z^2 + z^4.$$

1) Cauchy, Considérations générales sur les fonctions symétriques alternées, Journ. de l'école polyt., Tome X. S. 48.

2) Naegelsbach, Ueber eine Classe symmetrischer Funktionen, Zweibrücken 1871. S. 2.

3) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. S. 85.

4) Borchardt, in Baltzer, Theorie etc., S. 50.

5) Baltzer, S. 18.

6) Hankel, Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten, Göttingen 1861. S. 4.

7) Ibid. S. 5.

8) Ibid. S. 4.

9) v. Zeipel, Om Determinanter, hvars elementer äro Binomialkoefficienter, Lunds Universitets Ars-Skrift för ar 1865, S. 10.

10) Zehfuss, Anwendungen einer besondren Determinante, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., 7. Jahrg. S. 439.

11) Baltzer, S. 98.

12) Stern, Einige Bemerkungen über eine Determinante, Crelle's Journal f. reine u. angew. Math., 73. Band. S. 374.

13) Natani, Mathematisches Wörterbuch, 6. Band, Berlin 1867. S. 618.

14) Cayley, Sur les déterminants gauches, Crelle's Journal, 38. Band, S. 95.

15) Scheibner, Ueber Halbdeterminanten, Sitzungsber. der Sächs. Gesellsch. d. Wissschftn, 11. Band. S. 151.

16) Borchardt, in Baltzer, Theorie etc. S. 57.

17) Veltmann, Beiträge zur Theorie der Determinanten, Schlömilch's Zeitschrift, 16. Jahrg. S. 516.

18) Jacobi, Ueber die Pfaff'sche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen 2n Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren, Crelle's Journal, 2. Band. S. 354.

Kapitel IV.

Cubische Determinanten.

§. 1. Wir sahen oben (Kap. I. §. 5), dass der französische Mathematiker Vandermonde zuerst sich genöthigt sah, die verschiednen Elemente eines Systemes von Termen durch drei denselben angehängte Indices zu unterscheiden. Abgesehen von jenem ersten isolirt dastehenden Auftreten dieser Bezeichnungsweise finden wir bis in die neueste Zeit hinein nirgends etwas Analoges; erst Somoff [1]) ist im Verlaufe einer auf ganz andre Ziele gerichteten Untersuchung zu der Anwendung des dreifachen Index und den damit in engster Beziehung stehenden cubischen Determinanten hingeführt worden. Zuletzt haben besonders italinische Gelehrte, de Gasparis [2]), Armenante [3]) und Padova [4]), diesen analytischen Gebilden ihre Aufmerksamkeit zugewendet und eine Reihe von Eigenschaften für dieselben gefunden, welche denen der gewöhnlichen Determinanten vollkommen analog sind. In Deutschland hat sich besonders Zehfuss [5]) mit diesem Gegenstande beschäftigt und ihn in Beziehung zu den Theoremen der neueren Algebra gesetzt.

§. 2. Sind n^3 Elemente gegeben, so können wir dieselben in Gestalt eines Würfels anordnen, und zwar muss dann jedes einzelne Element durch drei Indices charakterisirt werden, welche gewissermassen seine Coordinaten in Bezug auf ein mit den drei Würfelkanten zusammenfallendes rechtwinkliges System ausdrücken. Das nachstehende Schema, in welchem 216 Elemente in der angegebenen Weise zusammengestellt sind, wird diess erläutern.

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} & a_{115} & a_{116} \\
a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} & a_{125} & a_{126} \\
a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{134} & a_{135} & a_{136} \\
a_{141} & a_{142} & a_{143} & a_{144} & a_{145} & a_{146} \\
a_{151} & a_{152} & a_{153} & a_{154} & a_{155} & a_{156} \\
a_{161} & a_{162} & a_{163} & a_{164} & a_{165} & a_{166}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} & a_{215} & a_{216} \\
a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} & a_{225} & a_{226} \\
a_{231} & a_{232} & a_{233} & a_{234} & a_{235} & a_{236} \\
a_{241} & a_{242} & a_{243} & a_{244} & a_{245} & a_{246} \\
a_{251} & a_{252} & a_{253} & a_{254} & a_{255} & a_{256} \\
a_{261} & a_{262} & a_{263} & a_{264} & a_{265} & a_{266}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{311} & a_{312} & a_{313} & a_{314} & a_{315} & a_{316} \\
a_{321} & a_{322} & a_{323} & a_{324} & a_{325} & a_{326} \\
a_{331} & a_{332} & a_{333} & a_{334} & a_{335} & a_{336} \\
a_{341} & a_{342} & a_{343} & a_{344} & a_{345} & a_{346} \\
a_{351} & a_{352} & a_{353} & a_{354} & a_{355} & a_{356} \\
a_{361} & a_{362} & a_{363} & a_{364} & a_{365} & a_{366}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{411} & a_{412} & a_{413} & a_{414} & a_{415} & a_{416} \\
a_{421} & a_{422} & a_{423} & a_{424} & a_{425} & a_{426} \\
a_{431} & a_{432} & a_{433} & a_{434} & a_{435} & a_{436} \\
a_{441} & a_{442} & a_{443} & a_{444} & a_{445} & a_{446} \\
a_{451} & a_{452} & a_{453} & a_{454} & a_{455} & a_{456} \\
a_{461} & a_{462} & a_{463} & a_{464} & a_{465} & a_{466}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{511} & a_{512} & a_{513} & a_{514} & a_{515} & a_{516} \\
a_{521} & a_{522} & a_{523} & a_{524} & a_{525} & a_{526} \\
a_{531} & a_{532} & a_{533} & a_{534} & a_{535} & a_{536} \\
a_{541} & a_{542} & a_{543} & a_{544} & a_{545} & a_{546} \\
a_{551} & a_{552} & a_{553} & a_{554} & a_{555} & a_{556} \\
a_{561} & a_{562} & a_{563} & a_{564} & a_{565} & a_{566}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{611} & a_{612} & a_{613} & a_{614} & a_{615} & a_{616} \\
a_{621} & a_{622} & a_{623} & a_{624} & a_{625} & a_{626} \\
a_{631} & a_{632} & a_{633} & a_{634} & a_{635} & a_{636} \\
a_{641} & a_{642} & a_{643} & a_{644} & a_{645} & a_{646} \\
a_{651} & a_{652} & a_{653} & a_{654} & a_{655} & a_{656} \\
a_{661} & a_{662} & a_{663} & a_{664} & a_{665} & a_{666}
\end{array}
$$

In jedem solchen Cubus von n^3 Elementen unterscheidet man ersichtlich n Horizontal- und n^2 Verticalebenen. Geleitet durch die Analogie können wir dann Folgendes festsetzen:

Bildet man aus den gegebenen Elementen sämmtliche Produkte zu je n Faktoren, welche das System zulässt, ohne dass in einem dieser Produkte mehr als Ein ein und derselben Horizontal- oder Vertikalebene angehöriges Element vorkommt, und versieht diese Produkte nach einem bestimmten Gesetze zum Theil mit dem positiven, zum Theil mit dem negativen Vorzeichen, so nennt man die algebraische Summe all dieser Produkte die cubische Determinante des Systemes.

Während bei einer quadratischen Determinante von zwei Diagonalreihen gesprochen werden konnte, giebt es deren hier im Ganzen vier. Wir halten an dem Gebrauche fest, die Reihe der Elemente

$$a_{111},\ a_{222}\ \ldots\ a_{n\,n\,n}$$

als erste Diagonalreihe zu bezeichnen.

Die Zeichenregel für die einzelnen Glieder könnte an sich willkürlich gewählt werden; um aber die Analogie nicht zu verletzen, stellen wir dieselbe durch folgende Betrachtung fest, welche zugleich das Bildungsgesetz und die Anzahl der bei der Entwickelung sich ergebenden Glieder erkennen lässt.

Man schreibe zunächst das Anfangsglied

$$a_{111}\ a_{222}\ \ldots\ a_{nnn}$$

hin und bilde sämmtliche Permutationen aus den Nummern 1, 2...n, deren es n! giebt. Hierauf ersetze man die Serie der dritten Indices der Reihe nach durch sämmtliche andre Complexionen, welche man beim Permutiren erhalten hat, während die beiden ersten Indices überall unverändert bleiben. Jedem einzelnen Gliede ertheile man das positive oder negative Zeichen, je nachdem die Complexion seiner dritten Indices eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen aufweist. Nachdem so die ersten n! Glieder gebildet sind, bilde man ein neues Glied dadurch, dass man, während zweite und dritte Indices ihre Plätze behaupten, an Stelle der bisher constant gebliebenen Complexion der ersten Indices die zweite Complexion aus der Reihe der obigen n! Permutationen einsetzt. Indem man dies Glied, welchem selbstverständlich das entgegengesetzte Zeichen zu-

kommt, als dem ihm zunächst vorhergehenden, in analoger Weise behandelt, gelangt man zu weiteren n! Entwickelungsgliedern und kann so lange derart fortschreiten, bis sämmtliche Glieder dargestellt sind.

Aus diesen Angaben abstrahiren wir Folgendes:

Die Entwickelung einer cubischen Determinante vom nten Grade liefert

$$\underset{(n!)}{n! + n! + \ldots + n!} = (n!)^2$$

Glieder. Ein Glied erhält das positive Vorzeichen, wenn die Anzahlen der Inversionen, durch welche die beiden Complexionen der ersten und dritten Indices aus der Anfangscomplexion

$$1\ 2\ \ldots\ n$$

hervorgegangen sind, zusammenaddirt eine gerade Zahl ergeben, das negative, wenn diese Summe ungerade ist.

Man erkennt hieraus auch sofort, dass die eine Hälfte der Glieder mit dem positiven, die andre mit dem negativen Vorzeichen versehen sein muss.

Entwickeln wir so die cubische Determinante dritten Grades

$$\triangle = \left\{\begin{array}{ccc} 111 & 112 & 113 \\ 121 & 122 & 123 \\ 131 & 132 & 133 \\ 211 & 212 & 213 \\ 221 & 222 & 223 \\ 231 & 232 & 233 \\ 311 & 312 & 313 \\ 321 & 322 & 323 \\ 331 & 332 & 333 \end{array}\right. ,$$

so erhalten wir $6^2 = 36$ Glieder, nämlich die folgenden:

111 222 333,	111 322 233,	211 122 333,
111 223 332,	111 323 232,	211 123 332,
112 221 333,	112 321 233,	212 121 333,
112 223 331,	112 323 231,	212 123 331,
113 221 332,	113 321 232,	213 121 332,
113 222 331,	113 322 231,	213 122 331,

211 322 133,	311 122 233,	311 222 133,
211 323 132,	311 123 232,	311 223 132,
212 321 133,	312 121 233,	312 221 133,
212 323 131,	312 123 231,	312 223 131,
213 321 132,	313 121 232,	313 221 132,
213 322 131,	313 122 231,	313 222 131.

Will man das Vorzeichen irgend eines Gliedes, z. B. das von

213 321 132

bestimmen, so betrachtet man die beiden Complexionen

231 und 312.

Erstre weist gegen die Anfangscomplexion

123

3, letztere 4 Inversionen auf; $3 + 4 = 7$ ist eine ungerade Zahl, und das Glied erhält das Minuszeichen.

§. 3. Ebenso wie wir bei den quadratischen Determinanten horizontale und verticale Reihen unterschieden, giebt es bei den cubischen Determinanten Horizontalebenen und zwei Gattungen von Vertikalebenen. Diejenigen Ebenen, welche bei der von uns befolgten Anordnung der Papierebene parallel verlaufen, wollen wir Vertikalebenen der ersten Art, die hierauf senkrechten Verticalebenen der zweiten Art nennen.

Denken wir uns nunmehr, es seien zwei Horizontalebenen mit einander vertauscht worden; hiedurch haben die beiden letzten Indices keine Aenderung erlitten. Entwickeln wir also die Determinante vor und nach der Vertauschung, so ist klar, dass die einzelnen Glieder in beiden Entwickelungen, dem absoluten Werthe nach einander bezüglich gleich sein müssen; die Umtauschung des ersten Index aber hat, den oben getroffenen Bestimmungen gemäss, für das betreffende Glied einen Zeichenwechsel bewirkt. Das Gleiche ist der Fall, wenn man zwei Vertikalebenen der zweiten Art mit einander vertauscht. Nimmt man dagegen diese Operation vor mit zwei Vertikalebenen der ersten Art, so bleiben der erste und dritte Index ungeändert, und die Vertauschung bezieht sich lediglich auf den zweiten Index, welcher, wie wir sahen, für die Bestimmung des Vorzeichens gleichgültig ist. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

Eine cubische Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn zwei Horizontalebenen oder zwei Vertikalebenen der zweiten Art mit einander vertauscht werden.

Eine cubische Determinante bleibt ungeändert, wenn zwei Vertikalebenen der ersten Art mit einander tauscht werden.

Es ist also die obige Determinante $\triangle$ gleich

$$-\begin{vmatrix} 211 & 212 & 213 \\ 221 & 222 & 223 \\ 231 & 232 & 233 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 111 & 112 & 113 \\ 121 & 122 & 123 \\ 131 & 132 & 133 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 311 & 312 & 313 \\ 321 & 322 & 323 \\ 331 & 332 & 333 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 113 & 112 & 111 \\ 123 & 122 & 121 \\ 133 & 132 & 131 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 213 & 212 & 211 \\ 223 & 222 & 221 \\ 233 & 232 & 231 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 313 & 312 & 311 \\ 323 & 322 & 321 \\ 333 & 332 & 331 \end{vmatrix}$$

$$= +\begin{vmatrix} 111 & 112 & 113 \\ 131 & 132 & 133 \\ 121 & 122 & 123 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 211 & 212 & 213 \\ 231 & 232 & 233 \\ 221 & 222 & 223 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 311 & 312 & 313 \\ 331 & 332 & 333 \\ 321 & 322 & 333 \end{vmatrix}.$$

Als Zusatz tritt zu dem Obigen noch Folgendes hinzu:

Eine cubische Determinante verschwindet identisch, wenn zwei Horizontalebenen oder zwei Vertikalebenen der zweiten Art einander in allen Stücken gleich sind.

Ferner übersieht man auch sofort die Wahrheit des Satzes:

Um eine cubische Determinante mit einer Zahl zu multipliciren hat man sämmtliche Elemente ein und derselben Determinanten-Ebene mit ihr zu multipliciren.

§. 4. Fasst man alle diejenigen Entwickelungsglieder einer cubischen Determinante zusammen, welche das Element

$$a_{g\,h\,k}$$

als gemeinschaftlichen Faktor haben, und setzt man denselben vor eine Klammer, so bleibt in dieser ein Aggregat von

$$((n - 1)!)^2$$

Gliedern zurück, und in jedem einzelnen Gliede sind ausschliesslich solche Elemente vertreten, welche mit $a_{g\,h\,k}$ in keiner Horizontal- oder Vertikalebene zusammen vorkommen. Es sind diess im Ganzen

$$(n - 1)^3$$

Elemente, welche sich sofort wieder zu einer cubischen Determinante vom $(n - 1)$ten Grade combiniren lassen. In ganz analoger Weise, wie bei den quadratischen Determinanten (vergl. Kap. II. §. 5), erhält man den Coëfficienten $\triangle'$ dieses Elementes, wenn $\triangle$ die ursprüngliche Determinante ist, durch die Gleichung

$$\triangle' = \frac{d\triangle}{da_{gkh}},$$

und bezeichnet die Determinante $\triangle'$ als die erste Unterdeterminante von $\triangle$, genommen nach dem Element a_{ghk}.

Diess liefert uns eine zwar recurrente, aber für die Praxis gleichwohl bei weitem bequemere Regel zur wirklichen Ausrechnung einer cubischen Determinante, als diess die oben erwähnte independente war. Ganz ebenso, wie wir eine quadratische Determinante früher nach den Elementen einer bestimmten Reihe in Unterdeterminanten zerlegten, nehmen wir jetzt diese Zerlegung nach den Elementen einer bestimmten Ebene vor, und zwar beschränken wir uns hier auf Horizontalebenen, indem natürlich für jede andre Ebene das Verfahren sich analog gestaltet. Um den Coëfficienten jeden Elementes einer solchen Ebene zu bilden, legt man durch das Element als Ursprung ein mit den Würfelkanten der Richtung nach übereinstimmendes rechtwinkliges System und ordnet alle diejenigen Elemente in eine Determinante an, welche auf keiner der drei Axen dieses Systemes liegen. Zur Bestimmung des Vorzeichens brauchen wir blos zu berücksichtigen, dass jedes Element von der Form

$$a_{q\,11}$$

positiv sein muss, demnach $a_{q\,12}$ und $a_{q\,21}$ negativ. Hieraus ziehen wir dann folgende Vorschrift:

Soll eine cubische Determinante nach den Elementen der qten Horizontalebene in Unterdeterminanten zerlegt werden, so untersuche man zuerst, ob die Zahl

$$q + 1 + 1$$

gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle erhält jedes

Glied der Zerlegung das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Indexsumme

$$g + h + k$$

des Elementes a_{ghk} gerade oder ungerade ist, im andren Falle verhält es sich umgekehrt.

Soll beispielsweise die obige Determinante dritten Grades nach den Elementen der ersten Horizontalebene in Unterdeterminanten zerlegt werden, so bildet man zuerst

$$1 + 1 + 1 = 3.$$

Dann erhält also etwa $113 = 5$ das positive, $132 = 6$ das negative Zeichen, und als Resultat der Zerlegung erhält man:

$$111\begin{Vmatrix} 222 & 223 \\ 232 & 233 \end{Vmatrix} - 112\begin{Vmatrix} 221 & 223 \\ 231 & 233 \end{Vmatrix} + 113\begin{Vmatrix} 221 & 222 \\ 231 & 232 \end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix} 322 & 323 \\ 332 & 333 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 321 & 323 \\ 331 & 333 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 321 & 322 \\ 331 & 332 \end{Vmatrix}$$

$$- 123\begin{Vmatrix} 211 & 212 \\ 231 & 232 \end{Vmatrix} + 122\begin{Vmatrix} 211 & 213 \\ 231 & 233 \end{Vmatrix} - 121\begin{Vmatrix} 212 & 213 \\ 232 & 233 \end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix} 311 & 312 \\ 331 & 332 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 311 & 313 \\ 331 & 333 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 312 & 313 \\ 332 & 333 \end{Vmatrix}$$

$$+ 131\begin{Vmatrix} 211 & 213 \\ 222 & 223 \end{Vmatrix} - 132\begin{Vmatrix} 211 & 213 \\ 221 & 223 \end{Vmatrix} + 133\begin{Vmatrix} 211 & 212 \\ 221 & 222 \end{Vmatrix}.$$
$$\begin{Vmatrix} 311 & 313 \\ 322 & 323 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 311 & 313 \\ 321 & 323 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 311 & 312 \\ 321 & 323 \end{Vmatrix}$$

hingegen würde man bei der Determinante zweiten Grades, zerlegt nach den Elementen der zweiten Horizontalebene finden:

$$\begin{Vmatrix} 111 & 112 \\ 121 & 122 \end{Vmatrix} = 211.122 - 212.121 + 222.111 - 221.112,$$
$$\begin{Vmatrix} 211 & 312 \\ 221 & 222 \end{Vmatrix}$$

indem

$$2 + 1 + 1 = 4$$

eine gerade Zahl ist.

Ganz ebenso, wie bei den quadratischen Determinanten, lassen sich auch hier Regeln für die Bildung höherer Unterdeterminanten geben; die Relation, welche den Coëfficienten $\triangle_q$ des Produktes

$$a_{b_1 c_1 d_1}\, a_{b_2 c_2 d_2} \cdot \cdot \cdot a_{b_q c_q d_q}$$

finden lehrt,

$$\triangle_q = \frac{d^q \triangle}{da_{b_1 c_1 d_1}\, da_{b_2 c_2 d_2} \cdot \cdot \cdot da_{b_q c_q d_q}},$$

wird auch hier ihre Gültigkeit behaupten.

§. 5. Die Entwickelung einer cubischen Determinante zeigt auch, dass, wenn sämmtliche Elemente ein und derselben Ebene aus gleichvielen Summanden zusammengesetzt sind, die Determinante sich in eine Summe zerlegen lässt, deren einzelne Glieder wieder cubische Determinanten sind.

So ist ganz allgemein

$$\begin{array}{l}
a_{111}\ a_{112}\ .\ .\ a_{11q} + b_{11}\ .\ .\ a_{11n} \\
a_{121}\ a_{122}\ .\ .\ a_{12q} + b_{12}\ .\ .\ a_{12n}, \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
\quad a_{1n1}\ a_{1n2}\ .\ .\ a_{1nq} + b_{1n}\ .\ .\ a_{1nn} \\
a_{211}\ a_{212}\ .\ .\ a_{21q} + b_{21}\ .\ .\ a_{21n} \\
a_{221}\ a_{222}\ .\ .\ a_{22q} + b_{22}\ .\ .\ a_{22n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
\quad a_{2n1}\ a_{2n2}\ .\ .\ a_{2nq} + b_{2q}\ .\ .\ a_{2nn} \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{n11}\ a_{n12}\ .\ .\ a_{n1q} + b_{n1}\ .\ .\ a_{n1n} \\
a_{n11}\ a_{n22}\ .\ .\ a_{n2q} + b_{n2}\ .\ .\ a_{n2n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{nn1}\ a_{nn2}\ .\ .\ a_{nnq} + b_{nn}\ .\ .\ a_{nnn}
\end{array}
=
\begin{array}{l}
a_{111}\ a_{112}\ .\ .\ a_{11q}\ .\ .\ a_{11n} \\
a_{121}\ a_{122}\ .\ .\ a_{12q}\ .\ .\ a_{12n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{1n1}\ a_{1n2}\ .\ .\ a_{1nq}\ .\ .\ a_{1nn} \\
a_{211}\ a_{212}\ .\ .\ a_{21q}\ .\ .\ a_{21n} \\
a_{221}\ a_{222}\ .\ .\ a_{22q}\ .\ .\ a_{22n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{2n1}\ a_{2n2}\ .\ .\ a_{2nq}\ .\ .\ a_{2nn} \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{n11}\ a_{n12}\ .\ .\ a_{n1q}\ .\ .\ a_{n1n} \\
a_{n21}\ a_{n22}\ .\ .\ a_{n2q}\ .\ .\ a_{n2n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{nn1}\ a_{nn2}\ .\ .\ a_{nnq}\ .\ .\ a_{nnn}
\end{array}$$

$$+ \begin{array}{l}
a_{111}\ a_{112}\ .\ .\ b_{11}\ .\ .\ a_{11n} \\
a_{121}\ a_{122}\ .\ .\ b_{12}\ .\ .\ a_{11n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{1n1}\ a_{1n2}\ .\ .\ b_{1n}\ .\ .\ a_{1nn} \\
a_{211}\ a_{212}\ .\ .\ b_{21}\ .\ .\ a_{21n} \\
a_{221}\ a_{222}\ .\ .\ b_{22}\ .\ .\ a_{22n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{2n1}\ a_{2n2}\ .\ .\ b_{2n}\ .\ .\ a_{2nn} \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{n11}\ a_{n12}\ .\ .\ b_{n1}\ .\ .\ a_{n1n} \\
a_{n21}\ a_{n22}\ .\ .\ b_{n2}\ .\ .\ a_{n2n} \\
\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
a_{nn1}\ a_{nn2}\ .\ .\ .\ b_{nn}\ .\ .\ a_{nnn}
\end{array};$$

denn entwickelt man die erste Determinante, so ist klar, dass jedes Glied dieser Entwickelung eine Summe von der Form

$$a_{klm} + b_{kl}$$

als Faktor enthalten muss; rechnet man also aus, so ergeben sich zwei Aggregate von je $(n!)^2$ Gliedern, deren jedes bezüglich mit einer der beiden obigen Determinanten identisch ist. Sollte jeder der Terme b noch mit einem constanten Faktor behaftet sein, so würde sich dieser vor die zweite Determinante heraussetzen lassen.

§. 6. Im Anschluss an die oben (§. 4) durchgeführte Zerlegung einer cubischen Determinante möge noch folgender spezielle Fall betrachtet werden. Die Determinante vierten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{134} \\ a_{141} & a_{142} & a_{143} & a_{144} \\ a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} & a_{234} \\ a_{241} & a_{242} & a_{243} & a_{244} \\ a_{311} & a_{312} & 0 & 0 \\ a_{321} & a_{322} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{333} & a_{334} \\ 0 & 0 & a_{343} & a_{344} \\ a_{411} & a_{412} & 0 & 0 \\ a_{421} & a_{422} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{433} & a_{434} \\ 0 & 0 & a_{443} & a_{444} \end{vmatrix},$$

und es sei gefordert, diese Determinante in Unterdeterminanten zu zerlegen, und zwar nach den Elementen der vierten Horizontalebene. Man findet $\triangle =$

$$a_{444}\ a_{333}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{vmatrix} - a_{443}\ a_{334}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{vmatrix} + a_{433}\ a_{344}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{vmatrix}$$

$$- a_{434}\ a_{343}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{vmatrix} + a_{422}\ a_{311}\begin{vmatrix} a_{133} & a_{134} \\ a_{142} & a_{144} \\ a_{233} & a_{234} \\ a_{243} & a_{244} \end{vmatrix} - a_{412}\ a_{321}\begin{vmatrix} a_{133} & a_{134} \\ a_{142} & a_{144} \\ a_{233} & a_{234} \\ a_{243} & a_{244} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{411}\ a_{322}\begin{cases} a_{133} & a_{134} \\ a_{143} & a_{144} \end{cases} - a_{421}\ a_{312}\begin{cases} a_{133} & a_{134} \\ a_{143} & a_{144}, \\ a_{333} & a_{234} \\ a_{243} & a_{244} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{233} & a_{234} \\ a_{243} & a_{244} \end{cases}$$

und diess Aggregat kann man offenbar auch so schreiben:

$$\begin{matrix} a_{111} & a_{112} \\ a_{121} & a_{122} \\ a_{211} & a_{212} \\ a_{221} & a_{222} \end{matrix} \cdot \begin{cases} a_{333} & a_{334} \\ a_{343} & a_{344} \\ a_{433} & a_{434} \\ a_{443} & a_{444} \end{cases} + \begin{cases} a_{133} & a_{134} \\ a_{143} & a_{144} \\ a_{233} & a_{234} \\ a_{243} & a_{244} \end{cases} \cdot \begin{cases} a_{311} & a_{312} \\ a_{321} & 322 \\ a_{411} & a_{412} \\ a_{421} & a_{422} \end{cases}.$$

Diess Resultat lässt sich verallgemeinern zu folgendem dem Laplace'schen entsprechenden Satze:

Sind in einer cubischen Determinante geraden Grades die $2\left(\frac{n}{2}\right)^3$ Elemente, welche $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ Verticalebenen mit $\frac{n}{2}$ Horizontalebenen, und welche die andren $\left(\frac{n}{2}\right)$ Vertikalebenen mit den nämlichen $\frac{n}{2}$ Horizontalebenen gemein haben, durch Nullen ersetzt, so reducirt sich die Determinante auf eine Summe aus zwei Summanden, deren jeder aus zwei Determinanten des $\left(\frac{n}{2}\right)$ten Grades als Faktoren zusammengesetzt ist. Selbstverständlich existirt ein analoger Satz auch für Determinanten ungeraden Grades.

§. 7. Es steht nichts im Wege, in der nämlichen Weise, wie wir hier Determinanten mit drei Indices gebildet haben, auch solche mit vier, und überhaupt mit beliebig vielen Indices zu bilden; jedoch müssen wir dann auf die geometrische Darstellung verzichten. In der oben angeführten Schrift von Zehfuss sind einige Fundamentalsätze solcher Determinanten entwickelt.

Die Anzahl der jedem Elemente angehängten Indices bestimmt den Rang der Determinante. Um die Glieder einer solchen Determinante von nten Rang und von qter Ordnung zu erhalten, geht man von dem Anfangsgliede

$$a_{111\ldots1_n}\ a_{222\ldots2_n}\ \ldots\ a_{qqq\ldots q_n}$$

aus und bestimmt nun willkürlich irgend eine Serie

$$1_m\ 2_m \ldots q_m$$

der Indices, welche bei den nachfolgenden Vertauschungen fest zu bleiben hat.

Alsdann setzt man resp. für die 1te, 2te . . . (m — 1) te, (m + 1)te . . . nte Serie alle Complexionen successive ein, welche aus der Anfangscomplexion durch Permutation hervorgehen können. Die Anzahl aller Entwickelungsglieder, welche die Determinante ergiebt, ist dann offenbar

$$(q!)^{n-1}.$$

Die Zeichenregel formulirt Zehfuss [6]) in dieser Weise: „Liefert die erste veränderliche Serie der Indices für sich m″, die dritte m‴ . . . Inversionen, so ist das Vorzeichen eines Gliedes der höheren Determinante + oder —, je nachdem die Gesammtzahl

$$m' + m'' + m''' + \ldots$$

seiner Inversionen gerade oder ungerade ist," — eine Vorschrift, welche mit der oben (§. 2) für den Spezialfall der cubischen Determinanten gegebenen ersichtlich übereinstimmt.

Die für quadratische und cubische Determinanten geltenden Sätze über das Vertauschen der Reihen bezüglich Ebenen lassen sich folgendermassen [7]) in erweiterter Fassung geben. „Jede Determinante höheren Ranges wechselt ihr Zeichen, wenn zwei derselben veränderlichen Serie angehörige Indices durchweg vertauscht werden. Wenn dagegen zwei der festen Serie angehörige Indices untereinander vertauscht werden, so wechselt die Determinante ihr Zeichen, oder nicht, je nachdem sie geraden oder ungeraden Ranges ist." Aus diesem Grunde ist es vortheilhaft, bei ungeradem Rang immer den mittleren Index fest zu lassen.

Auch die für die praktische Auswerthung so nützliche Zerlegung einer höheren Determinante in Unterdeterminanten lässt sich leicht in verallgemeinerte Formen bringen. Nennt man alle diejenigen Elemente, welche den nämlichen variablen Index als ersten aufweisen, einer Horizontalebene (von mehr als zwei Dimensionen) angehörig, so kann man folgendes aufstellen:

Jedes Element einer Horizontalebene erhält als Faktor eine Determinante vom nächst niedren Range, gebildet aus allen Elementen, welche keinen Index mit den seinigen bezüglich gleich haben; das Produkt ent-

hält das Plus- oder Minuszeichen, je nachdem das Anfangselement

$$a_{p111\ldots1}$$

der Ebene eine gerade oder ungerade, hingegen das betreffende Element eine ungerade oder gerade Indexsumme besitzt.

1) Somoff, Mémoire sur les accélérations de divers ordres, Mémoires de l'acad. impér. de St. Pétersbourg, Tome VIII. S. 33.

2) De Gasparis, Sopra due teoremi dei determinanti a tre indice, ed un altra maniera di formazione de gli elementi di un determinante ad m indice, Rendiconti dell' acad. delle science fis. e math. di Napoli, VII. S. 118.

3) Armenante, Sui determinanti cubici, Giornale di Battaglini, VI. S. 175.

4) Padova, Sui determinanti cubici, Ibid. VI. S. 182.

5) Zehfuss, Ueber eine Erweiterung des Begriffs der Determinanten, Frankfurt 1868.

6) Ibid. S. 3.

7) Ibid. S. 4.

Kapitel V.

Die Eliminationsprobleme.

§. 1. Wie sich bereits aus der historischen Entwickelung des Determinanten-Calculs ergiebt, finden diese Gebilde eine besonders wichtige Anwendung bei dem Probleme, aus einem gegebnen Systeme von linearen Gleichungen mit n Unbekannten diese letzteren zu berechnen.

Es sei gegeben folgendes System:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q + \ldots + a_{1n}x_n &= A_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q + \ldots + a_{2n}x_n &= A_2\\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots &\\
a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qq}x_q + \ldots + a_{qn}x_n &= A_q\\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots &\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nq}x_q + \ldots + a_{nn}x_n &= A_n.
\end{aligned}$$

Da jede unbekannte Grösse n mal hier vorkommt, so giebt es im Ganzen n^2 Coëfficienten dieser Unbekannten, welche wir zu einer Determinante vom n ten Grade

$$\triangle = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qq} & \ldots & a_{qn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nq} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

zusammenstellen können; dieselbe nennen wir mit Jacobi [1]) die Determinante des Systemes. Diese soll nun weiter umgeformt werden.

Wir multipliciren die q te Colonne mit x_q und erhalten

$$\triangle x_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1q}x_q & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2q}x_q & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{q1} & a_{q2} & . & . & a_{qq}x_q & . & . & a_{qn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nq}x_q & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nun kann man bekanntlich (Kap. II. §. 7) zu jeder Colonne einer Determinante, ohne ihren Werth zu ändern, die mit beliebigen Grössen multiplicirten übrigen Colonnen hinzuaddiren; multipliciren wir also die erste Colonne mit x_1, die zweite mit x_2 u. s. w., und addiren dieselben sämmtlich zur q ten Colonne, so folgt

$$\triangle . x_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{11}x_1 + . . . + a_{1q}x_q + . . . + a_{1n}x_n & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{21}x_1 + . . . + a_{2q}x_q + . . . + a_{2n}x_n & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{q1} & a_{q2} & . & . & a_{q1}x_1 + . . . + a_{qq}x_q + . . . + a_{qn}x_n & . & . & a_{qn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{n1}x_1 + . . . + a_{nq}x_q + . . . + a_{nn}x_n & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir jetzt für jedes Element der q ten Colonne den aus dem obigen Gleichungssysteme zu entnehmenden Werth, und dividiren mit $\triangle$, so findet sich

$$x_q = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & A_1 & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & A_2 & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{q1} & a_{q2} & . & . & A_q & . & . & a_{qn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & A_n & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1q} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2q} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{q1} & a_{q2} & . & . & a_{qq} & . & . & a_{qn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nq} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Diess liefert folgenden Lehrsatz:

Sämmtliche n Unbekannte, welche durch ein System von n linearen Gleichungen unter einander ver-

knüpft sind, lassen sich in Form von Brüchen darstellen, denen die Determinante des Systemes als gemeinschaftlicher Nenner zukommt. Um für die Unbekannte x_q den Zähler zu finden, ersetze man in dieser Determinante die qte Colonne durch die Reihe der nicht mit den Unbekannten verbundenen Grössen.

Diess ist die nämliche Auflösungsmethode, welche Leibnitz (vergl. Kap. I. §. 1) erdacht und Cramer (Kap. I. §. 2) wieder erfunden hat.

Beispiel. Gegeben sind drei Punkte im Raume mit den Coordinaten

$$x_1,\ y_1,\ z_1\ ;\ x_2,\ y_2,\ z_2\ ;\ x_3,\ y_3,\ z_3.$$

Es soll die Gleichung einer Ebene angegeben werden, welche durch diese drei Punkte hindurchgeht. Die Gleichung einer willkürlichen Ebene ist bekanntlich

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1;$$

demnach hat man für die drei unbekannten Grössen α, β, γ folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 &= 1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 &= 1 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 &= 1. \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus die Unbekannten, so erhält man als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} y + \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} z = 1.$$

§. 2. Wir haben im Vorstehenden vorausgesetzt, dass weder die Grössen A, noch auch die einzelnen Nenner verschwinden, d. h. es darf die Determinante des Systemes nicht identisch $=$ Null sein. Sollte dieser Fall eintreten, so würde sich für jede Unbekannte der Werth

$$\frac{0}{0}$$

ergeben, d. h. die einzelnen Gleichungen wären nicht von einander unabhängig. Z. B. bei

$$7x + 2y = 11$$
$$14x + 4y = 22,$$

also bei zwei identischen Gleichungen, erhielte man

$$\begin{vmatrix} 7 & -11 \\ 14 & -22 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 14 & 4 \end{vmatrix}$$

Wird allgemein A_q gleich Null, während $\triangle$ einen von Null verschiedenen endlichen Werth beibehält, so genügen dem Systeme offenbar nur folgende Werthe:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

In der That ist dann aber auch das System nicht mehr bestimmt, sondern mehr als bestimmt. Dividirt man jede der n Gleichungen durch eine beliebige Unbekannte, etwa durch x_n, so erhält man n Gleichungen mit den $(n - 1)$ Unbekannten

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n} \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Sondert man also aus den gegebnen n Gleichungen durch Weglassung einer beliebigen ein System von $(n - 1)$ Gleichungen aus und behandelt diess nach den gegebenen Vorschriften, so kann man die Werthe jener Verhältnisse sämmtlich berechnen.

Sind z. B. die drei Gleichungen gegeben:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

so findet man, vorausgesetzt vorläufig, dass

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet,

$$\frac{x}{y} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -c_2 & b_2 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}},$$

und einen entsprechenden Werth $\frac{y}{z}$.

Wir sind so jedoch auf das Paradoxon gekommen, dass die Grösse $\frac{x}{z}$ die angegebnen Werthe gleichzeitig haben soll, während doch die Grössen a, b, c vollkommen willkürlich angenommen wurden. Diess ist ersichtlich nicht möglich; es muss vielmehr noch eine Bedingungsgleichung zwischen diessen Grössen existiren. Untersuchen wir den vorliegenden Fall, so zeigt sich, dass die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

bestehen muss, woferne die drei für $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ daraus berechneten Werthe mit einander übereinstimmen sollen.

§. 3. Im Anschlusse hieran beweisen wir folgenden allgemeinen Satz:

Verschwindet die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

des Systemes identisch, während sämmmtliche erste Unterdeterminanten nicht verschwinden, so bestehen die Proportionen

$$x_1 : x_2 : \ldots x_n = \frac{d\triangle}{da_{k1}} : \frac{d\triangle}{da_{k2}} : \ldots : \frac{d\triangle}{da_{kn}},$$

unter k eine willkürliche positive ganze Zahl $\geqq 1, \leqq n$ verstanden.

Der Beweis dieses Satzes ist einfach. Denn man hat hiernach allgemein

$$x_q = M \frac{d\triangle}{da_{kq}},$$

unter M eine constante Zahl verstanden; es ist ferner nach Kap. II. §. 13

$$a_{q1} \frac{d\triangle}{da_{k1}} + a_{q2} \frac{d\triangle}{da_{k2}} + \ldots + a_{qn} \frac{d\triangle}{da_{kn}} = 0,$$

indem ja auch $\triangle$ selbst den Werth Null hat. Wenn man für die einzelnen Differentialquotienten ihre Werthe substiuirt und mit

$$\frac{1}{M}$$

hebt, so folgt

$$a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n = 0,$$

und diess war darzuthun.

Dem Obigen können wir jedoch noch eine andre für die gesammte Analysis äusserst wichtige Seite abgewinnen, indem wir folgenden Schluss ziehen. Damit die aus dem überbestimmten Systeme

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_n &\equiv a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{aligned}$$

berechneten Verhältnisse zweier Unbekannten stets den nämlichen Werth erhalten, man möge sie daraus berechnen, wie man wolle, ist es nothwendig, dass diese Gleichungen eine gewisse Bedingung erfüllen. Wir können dann sagen:

Damit die einzelnen Glieder eines Systemes von n linearen Gleichungen

$$u_1 = 0 \ldots u_n = 0$$

mit einander verträglich seien, ist es nothwendig, aber auch genügend, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

des Systemes identisch verschwinde.

Die hohe Bedeutung des Bisherigen wollen wir nun an verschiedenen Beispielen nachweisen.

§. 4. Vermittelst der Leibnitz-Cramer'schen Methode hat Hankel [2]) eine Lösung der von Gauss [3]) angeregten Frage gegeben: „Warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andre in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können."

Hankel denkt sich eine Reihe complexer Einheiten

$$\iota_1, \iota_2 \ldots \iota_n,$$

welche mit gewöhnlichen Zahlen a verbunden, eine complexe Zahl höherer Ordnung

$$\alpha = a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + \ldots + a_n\iota_n$$

ergeben. Die verschiednen Systeme höherer complexer Zahlen, welche sämmtlich in dieser Form enthalten sind, unterscheiden sich nun dadurch von einander, dass über das Produkt zweier solcher Einheiten

$$\iota_m \iota_p$$

ganz willkürlich verfügt werden kann. Man könnte also auch die Annahme machen, dass das Produkt zweier solcher Einheiten wieder einer Einheit selbst gleich sei; gelingt es dann zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die complexen Zahlen selbst wieder zu gewöhnlichen Zahlen werden, so ist damit offenbar eine völlig genügende Antwort auf Gauss's offene Frage gegeben.

Es sei also allgemein

$$\begin{aligned}
\iota_1\iota_2 &= a_{12} + a'_{12}\iota_1 + a''_{12}\iota_2 + \ldots + a^{(n)}_{12}\iota_n \\
\iota_1\iota_3 &= a_{13} + a'_{13}\iota_1 + a''_{12}\iota_2 + \ldots + a^{(n)}_{13}\iota_n \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\iota_1\iota_n &= a_{1n} + a'_{1n}\iota_1 + a''_{1n}\iota_2 + \ldots + a^{(n)}_{1n}\iota_n .
\end{aligned}$$

Bringt man die mit ι_1 behafteten Glieder auf die linke, die Produkte auf die rechte Seite, so kann man diess System auch so schreiben:

$$\begin{aligned}
-a_{12} - a'_{12}\iota_1 &= (a''_{12} - \iota_1)\,\iota_2 + a'''_{12}\iota_3 + \ldots + a^{(n)}_{12}\iota_n \\
-a_{13} - a'_{13}\iota_1 &= a''_{13}\iota_2 + (a'''_{13} - \iota_1)\,\iota_3 + \ldots + a^{(n)}_{13}\iota_n \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
-a_{1n} - a'_{1n}\iota_1 &= a''_{1n}\iota_2 + a'''_{1n}\iota_3 + \ldots + (a^{(n)}_{1n} - \iota_1)\,\iota_n .
\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesem System die Terme $\iota_2, \iota_3 \ldots \iota_n$, so findet sich beispielsweise

$$\iota_q = \frac{\begin{vmatrix} a_{12}''-\iota_1 & a_{12}''' & a_{12}^{(IV)} & \cdots & a_{12}' - a_{12}\iota_1 & \cdots & a_{12}^{(n)} \\ a_{13}'' & a_{13}'''-\iota_1 & a_{13}^{(IV)} & \cdots & a_{13}' - a_{13}\iota_1 & \cdots & a_{13}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}'' & a_{1n}''' & a_{1n}^{(IV)} & \cdots & a_{1n}' - a_{1n}\iota_1 & \cdots & a_{1n}^{(n)}-\iota_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12}''-\iota_1 & a_{12}''' & a_{12}^{(IV)} & \cdots & a_{12}^{(q)} & \cdots & a_{12}^{(n)} \\ a_{13}'' & a_{13}'''-\iota_1 & a_{13}^{(IV)} & \cdots & a_{13}^{(q)} & \cdots & a_{13}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}'' & a_{1n}'' & a_{1n}^{(IV)} & \cdots & a_{1n}^{(q)} & \cdots & a_{1n}^{(n)}-\iota_1 \end{vmatrix}}.$$

Diese beiden Determinanten sind vom (n — 1)ten Grade, und da jedes Element der ersten Diagonalreihe ι_1 linear enthält, so erkennt man ohne wirkliche Ausrechnung sofort, dass jede sich als eine Funktion vom (n — 1)ten Grade für ι_1 darstellen lässt. Setzt man für $\iota_2 \ldots \iota_n$ diese Werthe in der Gleichung

$$\iota_1\iota_1 = a_{11} + a_{11}\iota_1 + \ldots a_{1n}^{(n)}\iota_n$$

ein, so erhält man ersichtlich zur Bestimmung von ι_1 eine Gleichung vom (n + 1)ten Grade:

$$\iota_1^{n+1} + b_1\iota^n + \ldots + b_n\iota + b_{n+1} = 0.$$

Bezeichnet man die (n + 1) Wurzeln dieser Gleichung durch $c_1, c_2 \ldots c_{n+1}$, so hat man nach dem Fundamentalsatz der Algebra

$$(\iota_1 - c_1)(\iota_1 - c_2) \ldots (\iota_1 - c_{n+1}) = 0.$$

Da nun sämmtliche c gewöhnliche complexe Zahlen sind, so kann ι_1 nur dann eine wirklich neue complexe Zahl sein, wenn diess Produkt verschwinden würde, ohne dass einer der Faktoren zu Null würde, und diess verstösst eben gegen die Gesetze der allgemeinen Arithmetik.

§. 5. Ein andres instruktives Beispiel ist das folgende, welches besonders auch als Beleg dafür gelten kann, dass zur Darstellung independenter Ausdrücke die Determinanten auch dann noch gute Dienste leisten, wenn alle andren Hülfsmittel versagen. Bekanntlich existirt die Formel

$$\frac{n^{m-1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \tfrac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 n^{m-1} - \tfrac{1}{4}\binom{m}{3} B_3 n^{m-3} + \tfrac{1}{6}\binom{m}{5} B_5 n^{m-5} - \ldots = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m,$$

wo unter B_1, B_3 . . . die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen zu verstehen sind.

Obschon v. Staudt[4]) für die Nenner dieser in Bruchform auftretenden Zahlen ein einfaches Bildungsgesetz fand, so wollte es doch lange nicht gelingen, eine auch die Zähler umfassende independente Formel für dieselben auszumitteln; ganz neuerlich hat jedoch Nägelsbach diese Frage vermittelst der Determinanten zu einem einfachen Abschlusse gebracht.

Derselbe weist zunächst folgende Identität nach[5]):

$$2h + \sum_{q=1}^{q=h} (-1)^q (2h + 1)\, 2^{2q} B_{2q-1} = 0,$$

wo h alle Werthe der natürlichen Zahlenreihe bis h hin anzunehmen vermag.

Lässt man h diese verschiedenen Werthe successive wirklich annehmen, so erhält man folgendes System von h linearen Gleichungen:

$$\binom{3}{2} 2B_1 = 1$$

$$\binom{5}{2} 2B_1 - \binom{5}{4} 2^3 B_3 = 2$$

$$\binom{7}{2} 2B_1 - \binom{7}{4} 2^3 B_3 + \binom{7}{6} 2^5 B_5 = 3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\binom{2h-1}{2} 2B_1 - \binom{2h-1}{4} 2^3 B_3 + \binom{2h-1}{6} 2^5 B_5 - \ldots \pm \binom{2h-1}{2h-1} 2^{2h-3}\, {}_{2h-3}B = h - 1$$

$$\binom{2h+1}{2} 2B_1 - \binom{2h+1}{4} 2^3 B_3 + \binom{2h+1}{6} 2^5 B_5 - \ldots \pm \binom{2h+1}{2h-2} 2^{2h-3}\, {}_{2h-3}B \mp \binom{2h+1}{2h} {}_{2h-1}2B = h.$$

Betrachtet man in diesem Systeme die einzelnen Bernoulli'schen Zahlen als unbekannte Grössen, so kann man irgend eine derselben daraus bestimmen; wir bekommen so

$$B_{2h-1} = \frac{\begin{vmatrix} 2\binom{3}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2\binom{5}{2} & -2^3\binom{5}{4} & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 2\binom{7}{2} & -2^3\binom{7}{4} & 2^5\binom{7}{6} & \dots & 0 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2\binom{2h-1}{2} & -2^3\binom{2h-1}{4} & 2^5\binom{2h-1}{6} & \dots & \pm 2^{2h-3}\binom{2h-1}{2h-2} & h-1 \\ 2\binom{2h+1}{2} & -2^3\binom{2h+1}{4} & 2^5\binom{2h+1}{6} & \dots & \pm 2^{2h-3}\binom{2h+1}{2h-2} & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\binom{3}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\binom{5}{2} & -2^3\binom{5}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\binom{7}{2} & -2^3\binom{7}{4} & 2^5\binom{7}{6} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2\binom{2h-1}{2} & -2^3\binom{2h-1}{4} & 2^5\binom{2h-1}{6} & \dots & \pm 2^{2h-3}\binom{2h-1}{2h-2} & 0 \\ 2\binom{2h+1}{2} & -2^3\binom{2h+1}{4} & 2^5\binom{2h+1}{6} & \dots & \pm 2^{2h-3}\binom{2h+1}{2h-2} & \mp 2^{2h-1}\binom{2h+1}{2h} \end{vmatrix}}.$$

Ersichtlich können wir in jeder pten Colonne beider Determinanten mit Ausnahme der letzten die Grösse 2^{2p-1} als gemeinschaftlichen Faktor heraussetzen, der sich somit forthebt. Ferner reducirt sich nach Kap. II. §. 5 die im Nenner stehende Determinante auf ihr Diagonalglied; dasselbe wird ersichtlich positiv sein, wenn (h — 1) ebenfalls positiv ist, im andren Falle negativ. Mit Berücksichtigung dieser Vereinfachungen erhalten wir demnach als Schlussresultat folgende elegante Formel, wie sie Nägelsbach [6]) zuerst angegeben hat,

$$B_{2h-1} = (-1)^{h-1} \frac{\begin{vmatrix} \binom{3}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \dots & 0 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{2h-1}{2} & \binom{2h-1}{4} & \binom{2h-1}{6} & \dots & \binom{2h-1}{2h-2} & h-1 \\ \binom{2h+1}{2} & \binom{2h+1}{4} & \binom{2h+1}{6} & \dots & \binom{2h+1}{2h-2} & h \end{vmatrix}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2h+1)\, 2^{2h-1}}.$$

Statt $\binom{p}{p-1}$ haben wir im Nenner stets den gleichgeltenden Werth $\binom{p}{1} = p$ eingesetzt.

§. 6. Mit Hülfe der Determinanten und des in §. 3 niedergelegten Fundamentalsatzes hat Fürstenau [7]) eine sehr bemerkenswerthe Methode zur Auflösung höherer algebraischer Gleichungen erfunden, welche vor andren Verfahrungsweisen den grossen Vorzug hat, stets und ohne alle Vorbereitungen eine völlig bestimmte Wurzel zu liefern und mit gleicher Leichtigkeit auf literale, wie auf numerische Gleichungen sich anwenden zu lassen. Wir werden diese Methode hier nach der wesentlich vereinfachenden Ableitung Baltzer's [8]) darstellen.

Gegeben sei eine algebraische Gleichung vom nten Grade,

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

deren Wurzeln sämmtlich reell sein sollen; auch seien auf bekannte Weise die etwa darin vorkommenden mehrfachen Wurzeln bereits weggeschafft. Indem wir diese Gleichung sucessive mit x, x^2, x^3 ... multipliciren, erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} -a_0 &= a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \\ 0 &= a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{n-1} x^n + a_n x^{n+1} \\ 0 &= a_0 x^2 + \dots + a_{n-2} x^n + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^{n+2} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Sämmtliche Gleichungen sind in Bezug auf die einzelnen Po-

tenzen von x linear; man kann diese Potenzen also als unbekannte Grössen auffassen und (p — 1) aufeinanderfolgende derselben, z. B.

$$x^{k+1},\ x^{k+2}\ \ldots\ x^{k+p-1}$$

daraus nach §. 1 eliminiren. Wir bilden die (orthosymmetrische) Determinante pten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots & a_{k+p-2} & a_{k+p-1} \\ a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{k+p-3} & a_{k+p-2} \\ a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & \ldots & a_{k+p-4} & a_{k+p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k-1(p-1)} & a_{k-(p-2)} & a_{k-(p-3)} & \ldots & a_{k-1} & a_k \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun diejenigen Gleichungen, in welchen die zu eliminirenden Potenzen vorkommen, der Reihe nach mit

$$\frac{d\triangle}{da_k},\ \frac{d\triangle}{da_{k-1}}\ \ldots\ \frac{d\triangle}{da_{k-p+1}}$$

und setzt

$$\varphi_x^k = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)\frac{d\triangle}{da_k} + (a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^k)\frac{d\triangle}{da_{k-1}} + \ldots + a_0 x^k \frac{d\triangle}{da_{k-p+1}},$$

so ergiebt die Addition der betreffenden Gleichungen

$$0 = \varphi_x^k + b_1 x^{k+p} + b_2 x^{k+p+1} + \ldots b_{n-k} x^{n+p-1}.$$

Den Werth von φ_x^k kann man nun aber folgendermassen als Determinante schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots & a_{k+p-1} \\ a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^k & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{k+p-2} \\ a_0 x^2 + a_1 x^3 + \ldots + a_{k-2} x^k & a_{k-1} & a_k & \ldots & a_{k+p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 x^k & a_{k-p+2} & a_{k-p+3} & \ldots & a_k \end{vmatrix},$$

und diese Determinante lässt sich sofort in folgende Summe von (k + 1) Summanden zerfällen:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdot & \cdot \\ 0 & a_k & a_{k+1} & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{k-1} & a_k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_1 & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_k & a_{k+1} & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{k-1} & a_k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + x^k \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdot & \cdot \\ a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdot & \cdot \\ a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Es seien nun

$$x_{k+1},\ x_{k+2} \ldots x_{n-k}$$

Wurzeln der aufzulösenden Gleichung. Dann besteht dem Obigen zufolge nachstehendes System von (n — (k — 1)) Gleichungen:

$$0 = \overset{k}{\varphi x} + b_1 \overset{k+p}{x} + b_2 \overset{k+p+1}{x} + \ldots + b_{n-k} \overset{n+p-1}{x}$$

$$0 = \underset{k+1}{\varphi x} + b_1 \underset{k+1}{x} + b_2 \underset{k+1}{x} + \ldots + b_{n-k} \underset{k+1}{x}$$

$$\vdots$$

$$0 = \underset{n}{\varphi x} + b_1 \underset{n}{x} + b_2 \underset{n}{x} + \ldots + b_{n-k} \underset{n}{x},$$

und diess System ist in Bezug auf die Grössen b, welche Funktionen der übrigen Potenzen von x sind, linear. Damit diese Gleichungen sämmtlich zu Recht bestehen, muss ihre Determinante den Werth Null haben; dividiren wir darin jede Zeile durch ihr zweites Element, sowie jede q te Colonne durch b_q, so ergiebt sich uns folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\overset{k}{\varphi x}}{x^{k+p}} & 1 & x & \cdot & \cdot & x^{n-k-1} \\ \dfrac{\underset{k+1}{\varphi x}}{\underset{k+1}{x^{k+p}}} & 1 & \underset{k+1}{x} & \cdot & \cdot & \underset{k+1}{x^{n-k-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\underset{k}{\varphi x_n}}{\underset{n}{x^{k+p}}} & 1 & \underset{n}{x} & \cdot & \cdot & \underset{n}{x^{n-k-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die nach den Elementen der ersten Colonne genommenen Unterdeterminanten der Reihe nach mit

$$c_k\,,\ c_{k+1}\ .\ .\ .\ c_n\,,$$

so liefert die direkte Zerlegung die neue Gleichung

$$0 = c\,{}^{k}_{k}\varphi_x + c_{k+1}\left(\frac{x}{x_{k+1}}\right)^{k+p}\,{}^{k}_{k+1}\varphi_x + \ .\ .\ .\ + c_n\left(\frac{x}{x_n}\right)^{k+p}\,{}^{k}_{n}\varphi_x\,,$$

in welcher die Grössen c von p unabhängig sind.

Es seien nun

$$x_1,\ x_2\ .\ .\ x_{k-1},\ x_k\,,\ x_{k+1}\ .\ .\ x_n$$

die der Voraussetzung gemäss sämmtlich reellen Wurzeln der Gleichung, und zwar soll der höhere Index auch ein absolutes Grössersein der Wurzel andeuten.

Lässt man nun p über jede Grenze hinaus wachsen, so verschwindet jeder Bruch von der Form

$$\left(\frac{x}{x_q}\right)^{k+p},$$

und es bleibt nur übrig

$$\varphi^{k}_{x} = 0.$$

So hat man also für das Produkt der k ersten Wurzeln folgenden Werth gefunden:

$$x_1 x_2\ .\ .\ .\ x_k = (-1)^k\,a_0\,\frac{\begin{vmatrix} a_{k2} & a_{k+1} & a_{k+2} & .\ . \\ a_{k-1} & a_{k3} & a_{k+1} & .\ . \\ a_{k-2} & a_{k-1} & a_{k4} & .\ . \\ .\ & .\ & .\ & .\ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k+1} & a_{k+2} & .\ . \\ a_{k-1} & a_{k2} & a_{k+1} & .\ . \\ a_{k-2} & a_{k-1} & a_{k3} & .\ . \\ .\ & .\ & .\ & .\ \end{vmatrix}}.$$

Die den Diagonalelementen angehängten Zahlen dienen lediglich dazu, festzustellen, dass die Determinante des Zählers, wenn die Berechnung irgendwo abbricht, einen um 1 niedrigeren Grad bekommen muss, als die des Nenners.

Die absolut kleinste Wurzel x_1 hat speziell den Werth

$$- a_0 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}.$$

Mit besondrer Leichtigkeit liefert das hier skizzirte Verfahren die näherungsweise Auflösung solcher reciproker Gleichungen, deren Coëfficienten aufeinanderfolgende Binomialcoëfficienten sind. Hat man z. B. die Gleichung

$$0 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

zu behandeln, so ist nach Fürstenau die kleinste Wurzel, wenn wir etwa bei Determinanten vom 5ten und 6ten Grade stehen bleiben, gleich

$$- \frac{\begin{vmatrix} \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} \\ 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 \\ 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} \end{vmatrix}},$$

und diesem Quotienten können wir nach Kap. III. §. 9 den folgenden substituiren:

$$-\frac{\binom{4+4}{5}}{\binom{4+5}{6}} = -\frac{56}{84} = -\frac{2}{3}.$$

Dieser Werth, oben eingesetzt, ergiebt für das rechtsstehende Polynom den von Null verhältnissmässig nur wenig abweichenden Werth

$$0,\ 0\ 1\ 2\ \ldots$$

Die Annahmen über die Realität sämmtlicher Wurzeln, sowie über die Nicht-Existenz von Doppelwurzeln etc. sind nicht absolut nothwendig; Fürstenau hat [9]) den Nachweis geführt, dass auch hiefür seine Methode sich adaptiren lasse. Schliesslich kann man auch zeigen, dass je zwei aufeinanderfolgende Näherungswerthe den wahren Wurzelwerth zwischen sich einschliessen, jedoch muss in dieser Beziehung auf das sechste Kapitel verwiesen werden.

§. 7. In naher Beziehung zu den Deduktionen des vorigen Paragraphen steht die allgemeine Lösung der Aufgabe: Eine bei einem beliebigen Gliede abbrechende, recurrirende Reihe fortzusetzen, ohne deren „Scale“ zur Verfügung zu haben, sowie vor Allem deren Umkehrung. Bekanntlich ist eine solche Reihe von der r ten Ordnung durch 2r Folgeglieder bestimmt. Bezeichnet man also den Coëfficienten des qten Gliedes der Reihe mit a_q, so hat man der Bedingung der Recurrenz gemäss folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_r &+ \alpha_1 a_{r-1} + \alpha_2 a_{r-2} + \ldots + \alpha_r a_0 = 0,\\
a_{r+1} &+ \alpha_1 a_r + \alpha_2 a_{r-1} + \ldots + \alpha_r a_1 = 0,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
a_{2r} &+ \alpha_1 a_{2r-1} + \alpha_2 a_{2r-2} + \ldots + \alpha_r a_r = 0.
\end{aligned}$$

Die Bedingung für die Coëxistenz dieser Gleichungen ist die nachstehende:

$$\begin{vmatrix} a_r & a_{r-1} & \ldots & a_0 \\ a_{r+1} & a_r & \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2r} & a_{2r-1} & \ldots & a_r \end{vmatrix} = 0.$$

Sind also alle Glieder der Reihe bis zum 2r ten hin bekannt,

so lässt sich diess aus der letzten Gleichung linear berechnen; wäre das letzte Glied nicht a_{2r}, sondern a_{2r+1}, so würde man eine analoge orthosymmetrische Determinante erhalten, deren Diagonalelement nur nicht a_r, sondern a_{r-1} sein würde.

Ist z. B. die Reihe

$$1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + \ldots$$

um ein Glied fortzusetzen, so berechnen wir a_4 aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ a_4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

und finden $a_4 = 11$, so dass also die erweiterte Reihe

$$1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + \ldots$$

erhalten worden ist.

Eine recurrirende Reihe entsteht immer durch Division zweier ganzen Funktionen, so zwar, dass die Funktion im Nenner einen um 1 höheren Grad besitzt, als die im Zähler. Ist nun im Gegensatz zu dem eben discutirten Probleme eine vollständige recurrirende Reihe gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, zu derselben die erzeugende Bruchfunktion zu finden. Für diese Aufgabe, welche in neuerer Zeit Dietrich [10]) eingehend behandelt hat, wurde bereits früher eine elegante Lösung von Lieblein [11]) gegeben, die wir hier reproduciren wollen.

Die Reihe sei

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + \ldots,$$

die erzeugende Funktion

$$\frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r},$$

indem wir ja den ganzen Bruch mit dem ersten Gliede des Nenners dividiren können. Gehen wir nun auf das oben aufgestellte System linearer Gleichungen zurück, so finden wir in bekannter Weise daraus

$$\alpha_r = \frac{\begin{vmatrix} -a_r & a_1 & \ldots & a_{r-1} \\ -a_{r+1} & a_2 & \ldots & a_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{2r} & a_{r+1} & \ldots & a_{2r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{r+1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r & a_{r+1} & \ldots & a_{2r} \end{vmatrix}}.$$

Hieraus sind also die Constanten des Nenners vollständig bestimmt. Zur Berechnung des Zählers brauchen wir nur den Nenner mit der Reihe zu multipliciren, das Produkt dem Zähler gleich zu setzen und weiter nach dem Gesetz der unbestimmten Coëfficienten zu verfahren. Dann erhalten wir folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_1 &= a_2 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_0 \\ &\vdots \\ A_{r-1} &= a_{r-1} + \alpha_1 a_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} a_0, \end{aligned}$$

so dass also mit Rücksicht auf das zuletzt gefundene Resultat

$$A_q = a_{r-1} - \frac{a_1}{a_0} a_{r-2} - \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}} a_{r-3} - \ldots - \frac{\begin{vmatrix} a_q & \ldots & a_{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q} & \ldots & a_{2q-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_q & \ldots & a_{2q} \end{vmatrix}} a_{r-q}$$

sich ergiebt.

Auf die Analogie, welche zwischen dieser Gattung von Problemen und den im vorigen Paragraphen betrachteten obwaltet, hat zuerst Hankel (s. o. Kap. I. §. 8) hingewiesen.

§. 8. Von grosser Wichtigkeit für die Theorie der Gleichungen sind diejenigen Determinanten, durch welche man die verschiedenen Summen gleicher Wurzelpotenzen einer algebraischen Gleichung independent durch deren Coëfficienten auszudrücken im Stande ist. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n = 0,$$

und setzt man mit Fiedler [12])

$$\alpha_1^t + \alpha_2^t + \alpha_3^t + \ldots + \alpha_n^t = s_t,$$

so erhält man nach Albert Girard [13]) zur Berechnung dieser Summen folgendes System von recurrenten Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 s_1 &= 0 \\ 2a_2 + a_1 s_1 + a_0 s_2 &= 0 \\ 3a_3 + a_2 s_1 + a_1 s_2 + a_0 s_3 &= 0 \\ &\vdots \\ t a_t + a_{t-1} s_1 + a_{t-2} s_2 + \ldots + a_1 s_{t-1} + a_0 s_t &= 0. \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus s_t und bemerkt, dass die Determinante des Systemes

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{t-1} & a_{t-2} & a_{t-3} & . & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

sich auf das Produkt a_0^t ihrer Diagonalelemente reducirt, so findet man

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . & . & . & 0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ ta_t & a_{t-1} & a_{t-2} & a_{t-3} & . & . & . & a_1 \end{vmatrix}.$$

Würde man diese Determinanten nach den bekannten Regeln zerlegen, so würde man ein Resultat erhalten, das sich folgendermassen in Worte fassen lässt:

Die Summe der tten Potenzen einer algebraischen Gleichung kann dargestellt werden als eine Summe von

$$1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1$$

orthosymmetrischen Determinanten, deren jede noch mit einem gewissen Faktor behaftet ist.

So ist z. B. für $t = 3$

$$s_3 = -\frac{1}{a_0^3}\left[\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} + 2a_3 \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + a_0 a_1 a_2\right].$$

Das obige System linearer Gleichungen gestattet noch eine zweite, nicht weniger wichtige Verwendung, indem man nämlich nicht mehr die s, sondern vielmehr die a als unbekannte Grössen ansieht. Durch analoge Behandlung erhält man

$$a_t = \frac{(-a_0)^t}{t!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \ldots & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ s_{t-1} & s_{t-2} & s_{t-3} & s_{t-4} \ldots & t-1 \\ s_t & s_{t-1} & s_{t-2} & s_{t-3} \ldots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Für $t = 4$ hat man

$$a_4 = \frac{a_0}{4!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix} = \frac{a_0}{4!} (s_1^4 - 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_1^2 - 6s_4).$$

§. 9. Obwohl, streng genommen, nicht eigentlich zur Classe der Eliminationsprobleme gehörig, reihen wir doch hier die folgende für die Theorie der Gleichungen wichtige Betrachtung an. Wir behalten in diesem Paragraphen die Bezeichnungsweise des vorigen bei, indem wir nur der Einfachheit halber

$$a_0 = 1$$

setzen. Alsdann möge ausser den n Wurzeln $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ unsrer Gleichung vom nten Grade noch eine Reihe von n Grössen

$$\alpha'_1, \alpha'_2 \ldots \alpha'_n$$

vorhanden sein, und wir betrachten die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha'_1 - \alpha_1} & \frac{1}{\alpha'_2 - \alpha_1} \cdot \cdot & \frac{1}{\alpha'_n - \alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha'_1 - \alpha_2} & \frac{1}{\alpha'_2 - \alpha_2} \cdot \cdot & \frac{1}{\alpha'_n - \alpha_2} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \frac{1}{\alpha'_1 - \alpha_n} & \frac{1}{\alpha'_2 - \alpha_n} \cdot \cdot & \frac{1}{\alpha'_n - \alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir diese Determinante mit

$$\prod_{i=1}^{i=n} \prod_{j=1}^{j=n} (\alpha'_i - \alpha_j) = \begin{cases} (\alpha'_1 - \alpha_1)(\alpha'_1 - \alpha_2) \ldots (\alpha'_1 - \alpha_n) \times \\ (\alpha'_2 - \alpha_1)(\alpha'_2 - \alpha_2) \ldots (\alpha'_2 - \alpha_n) \times \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\alpha'_n - \alpha_1)(\alpha'_n - \alpha_2) \ldots (\alpha'_n - \alpha_n) \end{cases},$$

so erhält man eine Determinante, deren Elemente ausnahmslos ganze rationale Funktionen der gegebenen Grössen vom nten Grade sind. Bezeichnet man das Produkt sämmtlicher aus den Grössen α und α' für sich allein zu bildenden Differenzen bezüglich durch

$$P \text{ und } P',$$

so ist, das obige Produkt sowohl durch P, als durch P′ ohne Rest theilbar, d. h. es ist der Ausdruck

$$\frac{\triangle \cdot \prod_{i=1}^{i=n} \prod_{j=1}^{j=n} (\alpha'_i - \alpha_j)}{P \cdot P'}$$

weder von einem α, noch von einem α' abhängig. Setzen wir also für einen Augenblick

$$\alpha'_i = \alpha_i$$

so bleibt nur $\triangle$ übrig, und zwar reducirt sich diese Determinante auf ihr Diagonalglied

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P^2 = \begin{cases} (\alpha_1 - \alpha_2)\ (\alpha_1 - \alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_1 - \alpha_n) \times \\ (\alpha_2 - \alpha_1)\ (\alpha_2 - \alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_2 - \alpha_n) \times \\ \vdots \\ (\alpha_n - \alpha_1)\ (\alpha_n - \alpha_2)\ \ldots\ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{cases}$$

Der gesuchte Quotient ist also eine Potenz von (-1), und man erhält zum Schluss

$$\frac{P \cdot P'}{\prod_{i=1}^{i=n} \prod_{j=1}^{j=n} (\alpha'_i - \alpha_j)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha'_1 - \alpha_1} & \frac{1}{\alpha'_2 - \alpha_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha'_n - \alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha'_1 - \alpha_2} & \frac{1}{\alpha'_2 - \alpha_2} & \cdots & \frac{1}{\alpha'_n - \alpha_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha'_1 - \alpha_n} & \frac{1}{\alpha'_2 - \alpha_n} & \cdots & \frac{1}{\alpha'_n - \alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck P^2, welcher das Produkt der Quadrate aller möglichen Wurzeldifferenzen einer Gleichung darstellt, wird die Discriminante der Gleichung genannt, vorausgesetzt, dass die höchste Potenz von x den Coëfficienten 1 hat. Derselbe kann noch in einer andren Form dargestellt werden. Es ist nämlich nach Kap. III. §. 1

$$\Pi = (\alpha_1 - \alpha_2)\ (\alpha_1 - \alpha_3)\ .\ .\ (\alpha_1 - a_n) \times$$
$$(\alpha_2 - \alpha_3)\ .\ .\ (\alpha_2 - a_n) \times$$
$$.\ .\ .\ .\ .$$
$$(\alpha_{n-1} - a_n)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . & . & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . & . & \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^n \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & . & . & \alpha_3^{n-1} & \alpha_3^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & . & . & \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

und da das obige Doppelprodukt das Produkt Π offenbar zweimal, nur mit verändertem Vorzeichen der Differenzen in sich enthält, so ist P^2 gleich dem Produkt dieser Determinante, vor die noch das Vorzeichen

$$(-1)^{n(n-1)} = +1$$

tritt. Wir gewinnen so einen Satz, welchen Fiedler [14]) mit folgenden Worten ausdrückt:

Die Discriminante einer Gleichung kann nach dem Multiplicationsgesetze der Determinanten leicht aus dem Produkt aller Wurzeldifferenzen abgeleitet werden.

Einen einfachen Beweis der obigen Relation hat auch Weihrauch [15]) angegeben.

§. 10. Mit dem Namen des Eliminationsproblemes im engeren Sinne bezeichnet man gewöhnlich die Aufgabe, aus zwei gegebenen algebraischen Gleichungen mit Einer Unbekannten diese letzte wegzuschaffen. Es handelt sich hier also um Angabe derjenigen Relation zwischen den Coëfficienten beider Gleichungen, welche sich ergeben würde, wenn man die unbekannte Grösse aus der einen Gleichung bestimmte und ihren Werth in der andren substituirte. Mit Euler [16]), welcher diess Problem zuerst eingehender betrachtete, können wir dasselbe auch noch folgendermassen formuliren: Es soll die Bedingung dafür aufgesucht werden, dass den beiden gegebnen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel zukomme.

Eine Lösung der Aufgabe wurde, wie wir (Kap. I. §. 1) sahen, bereits von Leibnitz angedeutet; später beschäftigte sich Bezout (Kap. I. § 4) längere Zeit hindurch mit demselben; das Hauptaugenmerk richtete er bei seinen Arbeiten auf die Bestimmung des Grades der bei der Elimination resultirenden Gleichung. Er

erreichte seinen Zweck, wenn auch nicht in völliger Allgemeinheit; vollständig wurde auch dieser letztren Forderung die Regel Minding's [17]) gerecht, zu deren Herleitung sich ihr Erfinder jedoch noch nicht des eigentlichen Determinantencalculs bediente.

Die Auflösung unsrer Aufgabe geschieht am Einfachsten vermittelst der von Sylvester [18]) vorgeschlagenen und von ihm als dialytische bezeichneten Methode, welche von den Determinanten Gebrauch macht.

Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$
$$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0.$$

Man multiplicire die erste Gleichung successive mit

$$x^n, x^{n-1}, x^{n-2} \ldots x^3, x^2, x,$$

die zweite ebenso mit

$$x^m, x^{m-1}, x^{m-2} \ldots x^3, x^2, x;$$

alsdann erhält man ein System von (m + n) Gleichungen in folgender Gestalt:

$$a_m x^{m+n} + a_{m-1}x^{m+n-1} + \ldots + a_2 x^{n+2} + a_1 x^{n+1} + a_0 x^n = 0,$$
$$a_m x^{m+n-1} + \ldots + a_3 x^{n+2} + a_2 x^{n+1} + a_1 x^n + a_0 x^{n-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_m x^{m+1} + \ldots + a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x = 0;$$
$$A_n x^{m+n} + A_{n-1}x^{m+n-1} + \ldots + A_2 x^{m+2} + A_1 x^{m+1} + A_0 x^m = 0,$$
$$A_n x^{m+n-1} + \ldots + A_3 x^{m+2} + A_2 x^{m+1} + A_1 x^m + A_0 x^{m-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n x^{n+1} + \ldots + A_2 x^3 + A_1 x^2 + A_0 x = 0.$$

Betrachtet man sämmtliche Potenzen von x — ganz ebenso wie diess bei der Fürstenau'schen Methode (vergl. §. 6) erfordert wird — als Unbekannte, so ist in Bezug auf diese das System ein lineares. Damit also die gegebnen (m + n) Gleichungen zusammenbestehen können, muss eine Bedingungsgleichung existiren, und diess ist nach §. 3 dieses Kapitels die folgende:

$$\begin{vmatrix}
a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & a_m & a_{m-1} & \ldots & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & a_m & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \ldots & A_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & A_n & A_{n-1} & \ldots & A_1 & A_0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & A_n & \ldots & A_2 & A_1 & A_0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{vmatrix} = 0.$$

In dieser Gleichung kommt die Grösse x nicht mehr vor; sie ist somit das Resultat der Elimination.

Dass sich auf diese Weise der Grad der Eliminationsgleichung leicht bestimmen lässt, leuchtet ohne weiteres ein.

Beispiel 1. Hat man aus den beiden Gleichungen

$$ax^3 + bx^4 + cx^2 + d = 0,$$
$$fx^2 + gx + h = 0$$

die Unbekannte x zu eliminiren, so erhält man nach Sylvester folgende $(5 + 2) = 7$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
ax^7 + bx^6 + 0x^5 + cx^4 + 0x^3 + dx^2 &= 0,\\
ax^6 + bx^5 + 0x^4 + cx^3 + 0x^2 + dx &= 0,\\
fx^7 + gx^6 + hx^5 &= 0.\\
fx^6 + gx^5 + hx^4 &= 0,\\
fx^5 + gx^4 + hx^3 &= 0,\\
fx^4 + gx^3 + hx^2 &= 0,\\
fx^3 + gx^2 + hx &= 0.
\end{aligned}$$

Aus diesen sieben Gleichungen folgt durch Elimination

$$\begin{vmatrix}
a & b & 0 & c & 0 & d & 0\\
0 & a & b & 0 & c & 0 & d\\
f & g & h & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & f & g & h & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & f & g & h & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & f & g & h & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & f & g & h
\end{vmatrix} = 0.$$

Beispiel 2. Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte gegeben, und zieht man an jeden derselben Tangenten, so kann man aus denselben projectivische Systeme bilden; es besitzen nämlich zwei Systeme nach Hesse [19]) diese Eigenschaft dann, wenn auf einer geraden Linie eine zu beiden Systemen projectivische Punktreihe gefunden werden kann. Sind die Gleichungen der beiden Kegelschnitte in Liniencoordinaten gegeben, so sind die Gleichungen zweier solcher Tangentensysteme folgende:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$
$$A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0.$$

Je zwei aufeinander bezogene Gerade dieser Systeme bestimmen durch ihren Durchschnittspunkt eine gewisse Curve; man will wissen, von welcher Ordnung dieselbe ist. Die Gleichung der

krummen Linie findet sich aus den beiden obigen durch Elimination des Parameters λ [20]). Man hat nach Sylvester's Verfahren

$$\begin{vmatrix} C & B & A & 0 \\ 0 & C & B & A \\ C' & B' & A' & 0 \\ 0 & C' & B' & A' \end{vmatrix} = 0.$$

Gewöhnlich vertauscht man hier die erste mit der zweiten und die dritte mit der vierten Zeile, sowie auch die erste mit der vierten und die zweite mit der driten Colonne, so dass man

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0$$

erhält.

Ein Blick auf das Diagonalglied lässt erkennen, dass die durch diese Gleichung repräsentirte Curve von der vierten Ordnung ist.

§. 11. Wir gehen in der hier angeregten Frage noch um einen Schritt weiter und untersuchen die Bedingungen des gleichzeitigen Bestehens dreier algebraischer Gleichungen. Es möge dabei von der Annahme ausgegangen werden, die drei Gleichungen seien von gleichem Grade m; wäre diess nicht der Fall, so könnte man gleichwohl die beiden Gleichungen von niedrigeren Graden leicht auf diesen erheben, indem man etwa zu der vom kten Grade die Glieder

$$0x^{k+1} + 0x^{k+2} + \ldots + 0x^m$$

hinzuaddirte. Soll also das System

$$1)\ a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m = 0,$$
$$2)\ b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m = 0,$$
$$3)\ c_0 + c_1x + \ldots + c_mx^m = 0$$

zu Recht bestehen, so müssen 1) und 2) eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen, welche auch in 3) vorkommt. Die erste Bedingung ist nach §. 10 gegeben durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & a_m & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & . & . & a_{m-1} & a_m & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0_0 & . & . & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & b_m & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & . & . & b_{m-1} & b_m & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & . & . & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & . & . & 0 \\ , & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0,$$

um die zweite zu finden, brauchen wir nur nach dem ersten Elemente der ersten Zeile die Unterdeterminante zu bilden und alsdann statt $a_0 \ldots a_m$ in derselben Reihenfolge die Coëfficienten

$$c_0, c_1 \ldots c_{m-1}, c_m$$

der dritten Gleichung einzusetzen. Diese Determinante, gleich Null gesetzt, entspricht der zweiten Bedingung.

Dehnen wir diese Ueberlegung auf den allgemeinen Fall aus, so ergiebt sich uns folgender Satz:

Sollen m algebraische Gleichungen vom mten Grade gleichzeitig bestehen, d. h. eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen, so müssen (m — 1) Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Um diese zu finden, bilde man für zwei beliebige Gleichungen die Sylvester'sche Resultante und ordne dieselbe durch Vertauschung der Reihen so, dass mit Ausnahme der beiden mittleren keine zwei aufeinanderfolgende Zeilen die Coëfficienten der nämlichen Gleichung aufweisen. Hierauf nehme man die dem ersten Elemente der ersten Zeile entsprechende Unterdeterminanten und ersetze deren erste Zeile successive durch die Reihe der Coëfficienten der übrigen (m — 2) Gleichungen. Setzt man schliesslich diese (m — 1) Determinanten gleich Null, so erhält man die gesuchten Bedingungen.

Hat man das System

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 &= 0, \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 &= 0, \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 &= 0, \\ d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 &= 0, \end{aligned}$$

so folgt aus der ersten Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dann sind die zwei andren Gleichnngen die folgenden:

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Damit aber diese Gleichungen wirklich eine Relation zwischen den Coëfficienten ausdrücken, welche an und für sich nicht vorhanden ist, muss der obigen Unterdeterminante und allen mit ihr gleichberechtigten ein von Null verschiedener Ausdruck zukommen, d. h. es darf die aus den abgeleiteten Determinanten gebildete Matrix von m Colonnen und (m — 1) Zeilen nicht identisch verschwinden. In dem uns hier interessirenden Spezialfalle muss folglich die Umgleichung

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \right\| \gtrless 0$$

bestehen.

Die hier wiedergegebene Behandlung des allgemeinen Problems rührt von Björling[21]) hér, welcher davon auch eine einfache Anwendung auf die von v. Zeipel[22]) gestellte Aufgabe macht, zu entscheiden, ob und wann eine Gleichung einen Faktor von der Form

$$x^n - a^n$$

enthalte.

§. 12. Es ist von selbst klar, dass die bisher discutirte Eliminationsmethode auch dazu gebraucht werden kann, aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die eine wegzuschaffen, d. h. eine Gleichung herzustellen, in welcher nur noch eine einzige Unbekannte vorkommt. Man betrachtet eben einfach die nicht zu eliminirende Unbekannte vorläufig als bekannt, bildet die Resultante und hat dann eine Gleichung, in welcher ausser den Coëfficienten beider Gleichungen nur noch jene eine Unbekannte erscheint.

Hat man z. B. aus den Gleichungen

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0,$$
$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = 0$$

die unbekannte Grösse x zu eliminiren, so findet man nach §. 10 sofort

$$\begin{vmatrix} a & by & cy^2 & dy^3 & 0 \\ 0 & a & by & cy^2 & dy^3 \\ \alpha & \beta y & \gamma y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta y & \gamma y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta y & \gamma y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sieht sofort, dass die Elimination eine Gleichung vom sechsten Grade für y ergiebt.

Diess Verfahren bleibt auch dann noch anwendbar, wenn es darauf ankommt, aus n Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten (n — 1) der letztren zu eliminiren, so dass zuletzt nur Eine Gleichung mit einer Unbekannten restirt. Ein Beispiel wird den Weg klar machen, welchen man hier einzuschlagen hat. Gegeben seien folgende drei Gleichungen:

$$ax^2y^2 + bxz^2 + cyz = 0,$$
$$dx^2z + exy^2z + fy^2z^2 = 0,$$
$$gxyz + hy^2z = 0.$$

Die erste Gleichung liefern als Eliminationsresultat

$$\begin{vmatrix} ay^2 & bz^2 & cyz \\ gyz & hy^2 & 0 \\ 0 & gyz & hyz^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder aufgelöst,

$$ah^2y^5z^3 - bghy^2z^5 + cg^2y^3z^3 = 0.$$

Analog folgt aus der zweiten und dritten Gleichung

$$\begin{vmatrix} dz & ey^2z & fy^2z^2 \\ gyz & hy^2z & 0 \\ 0 & gyz & hy^2z \end{vmatrix} = dh^2y^4z^5 - eghy^5z^4 + fg^2y^4z^4 = 0.$$

Eliminirt man jetzt aus den beiden vorhandenen Gleichungen die Unbekannte y, so bleibt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ah^2 & 0 & -bghz^2 + cg^2 \\ -egh & dhz^2 + fg^2 & 0 \\ 0 & -egh & dhz^2 + fg^2 \end{vmatrix} = 0$$

übrig. Man ist so in den Stand gesetzt, das Resultat der Elimination sofort in der entwickelten Gestalt

$$ad^2h^2z^4 + g^2h(2df - be^2gh^2)z^2 + af^2g^4h^2 + ce^2g^4h^2 = 0$$

hinzuschreiben und sogar die eine Unbekannte durch einfache Auflösung einer quadratischen Gleichung zu bestimmen.

§. 15. In diesem Paragraphen sollen noch zwei interessante Anwendungen der Sylvester'schen Eliminationsmethode gelehrt werden. Aus dem Vorstehenden lässt sich nämlich auch leicht ein Verfahren ableiten, die in einer Gleichung vorkommenden Irrationalitäten wegzuschaffen und so ein altes bereits von Fermat [23]) angeregtes und seitdem von den verschiedensten Mathematikern mit mehr oder weniger Glück behandeltes Problem ganz allgemein zu lösen. Hat man nämlich die Gleichung

$$a_1 \sqrt[m_1]{f^{(1)}_{x_0}} + a_2 \sqrt[m_2]{f^{(2)}_{x_0}} + a_3 \sqrt[m_3]{f^{(3)}_{x_0}} + \ldots + a_n \sqrt[m_n]{f^{(n)}_{x_0}} = A$$

rational zu machen, wo $m_1 \ldots m_n$ willkürliche ganze positive Zahlen, $f^{(1)}_{x_0} \ldots f^{(n)}_{x_0}$ rationale und ganze Funktionen einer unbekannten Grösse x_0 sein mögen, so wird man

$$\sqrt[m_1]{f^{(1)}_{x_0}} = x_1$$

$$\sqrt[m_2]{f^{(2)}_{x_0}} = x_2$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[m_n]{f^{(n)}_{x_0}} = x_n$$

setzen. Indem man die beiden Seiten dieser Gleichungen bezüglich auf die m_1 te . . . m_n te Potenz erhebt, erhält man ein System von n rationalen Gleichungen, zu welchen noch die lineare Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_n x_n = \Lambda$$

hinzutritt. Aus diesen (n + 1) Gleichungen eliminirt man nun die n Unbekannten $x_1 \ldots x_n$ und behält dann eine Gleichung übrig, in welcher blos x_0 und zwar rational vorkommt.

Beispiel. Sei gegeben die Gleichung

$$\sqrt{Ax_0 + a} + \sqrt{Bx_0 + b} + c = 0.$$

Wir setzen

$$Ax_0 + a = x_1^2,\ Bx_0 + b = x_2^2,$$

und haben dann folgende drei Gleichungen

$$1)\ x_1 + x_2 + c = 0,$$
$$2)\ x_1^2 - Ax_0 = a$$
$$3)\ x_2^2 - Bx_0 = b.$$

Die Elimination von x_2 aus der ersten und dritten Gleichung ergiebt zunächst

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -Bx_0-b \\ 1 & x_1+c & 0 \\ 0 & 1 & x_1+c \end{vmatrix} = x_1^2 + 2cx_1 + c^2 - Bx_0 - b = 0;$$

diess zusammengefasst mit Gleichung 2) schliesslich

$$\begin{vmatrix} 1 & 2c & c^2-Bx_0-b & 0 \\ 0 & 1 & 2c & c^2-Bx_0-b \\ 1 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -A \end{vmatrix} = Bx_0^2 + 2B(b - c^2 - A)x_0 + A(A-2c^2-2b)+(c^2-b)^2 = 0.$$

Eine weitre Anwendung führt Schlömilch [24]) an. Sollen in der Gleichung

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

die complexen Wurzeln berechnet werden, so setze man

$$x = u + iv,$$

unter i die imaginäre Einheit verstanden. Fasst man, nachdem man diesen Werth oben substituirt hat, entsprechend zusammen, so geht unsre Gleichung in folgende über

$$f_{(u,\ v)} + i\ \varphi_{(u,\ v)},$$

wo f und φ ganze und rationale Funktionen von u und v vorstellen. Einen bekannten Satz über complexe Grössen zufolge ist dann

$$\varphi_{(u,\ v)} = f_{(u,\ v)} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man das einemal u; das andremal v eliminiren, so dass man zu zwei neuen Gleichungen

$$\psi_u = \chi_v = 0$$

gelangt. Beide Gleichungen enthalten nur reelle Wurzelwerthe.

Beispiel. Liegt die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

zur Berechnung vor, so verwandelt man sie durch die angegebene Substitution zunächst in nachstehende zwei Gleichungen:

$$u^3 - 3uv^2 - 2u^2 + 2v^2 + u - 2 = 0,$$
$$3u^2v - v^3 - 4uv + v = 0.$$

Die beiden Eliminationsgleichungen sind dann:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1-3v^2 & 2v^2-2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1-3v^2 & 2v^2-2 \\ 3v & -4v & v-v^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3v & -4 & v-v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3v & -4v & v-v^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3u^2+4u+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3u^2+4u+1 \\ 2-3u & 0 & u^3-2u^2+u-2 & 0 \\ 0 & 2-3u & 0 & u^3-2u^2+u-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Löst man beide Gleichuugen auf, so finden sich als zusammengehörige Werthe

$$u = 2, \; v = 0$$
$$u = 0, \; v = 1$$
$$u = 0, \; v = -1,$$

so dass also $x = u + iv$ resp. gleich

$$2, \; +i, \; -i$$

zu setzen ist.

§. 13. Die einzige Art und Weise, durch welche wir bis jetzt das Eliminationsresultat zwischen zwei algebraischen Gleichungen vom m ten und n ten Grade anzugeben im Stande sind, ist die, dass wir dafür eine der Null gleiche Determinante vom (m + n) ten Grade aufstellten. Es hat jedoch Cayley [25]) in Verfolgung einer bereits von Bézout (Kap. I. §. 4) ausgesprochnen Idee gezeigt, dass auch eine Determinante von niedrigerem Grade den nämlichen Dienst leisten könne, welcher dazu noch die Eigenschaft zukomme, eine symmetrische zu sein. Fiedler [26]) hat diese Methode an zwei Gleichungen des fünften Grades erläutert und diess Beispiel, aus dem sich sofort das allgemeine Verfahren abnehmen lässt, wollen wir hier reproduciren.

Wir setzen mit Sylvester [27]) die zweireihige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_p & a_q \\ a'_p & a'_q \end{vmatrix} = (a_p \, a'_q).$$

Sind nun die beiden Gleichungen

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0,$$
$$a'_0x^5 + a'_1x^4 + a'_2x^3 + a'_3x^2 + a'_4x + a'_5 = 0$$

gegeben, aus denen x eliminirt werden soll, so multiplicirt man die erste Gleichung mit a'_0, die zweite mit a_0 und subtrahirt letztre von erstrer, so folgt

$$(a_0a_1 - a_0a'_1)x^4 + (a'_0a_2 - a_0a'_2)x^3 + (a'_0a_3 - a_0a'_3)x^2 + (a'_0a_4 - a_0a'_4)x + (a'_0a_5 - a_0a'_5) = 0,$$

oder in Sylvester's abgekürzter Schreibweise

$$(a_0a'_1)x^4 + (a_0a'_2)x^3 + (a_0a'_3)x^2 + (a_0a'_4)x + (a_0a'_5) = 0.$$

Multiplicirt man ebenso die erste Gleichung mit

$$a'_0x + a'_1,$$

die zweite mit

$$a_0x + a_1,$$

so ergiebt die nämliche Subtraktion wie oben

$$(a_0a'_2)x^4 + [(a_0a'_3) + (a_1a'_2)]x^3 + [(a_0a'_4) + (a_1a'_3)]x^2 + [(a_0a'_5) + (a_1a'_4)]x + (a_1a'_5) = 0.$$

Multiplicirt man ferner die beiden Gleichungen noch successive mit folgenden Ausdrücken:

$$a'x_2 + a'_1x + a'_2;\ a_0x^2 + a_1x + a_2,$$
$$a'_0x^3 + a'_1x^2 + a'_2x + a'_3;\ a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$
$$a'_0x^4 + a'_1x^3 + a'_2x^2 + a'_3x + a'_3;\ a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

und bildet die Differenz, so erhält man diese drei weiteren Gleichungen:

$$(a_0a'_3)x^4 + [(a_0a'_4) + (a_1a'_3)]x^3 + [(a_0a'_5) + (a_1a'_4) + (a_2a'_3)]x^2 + [(a_1a'_5) + (a_2a'_4)]x + (a_2a'_5) = 0,$$
$$(a_0a'_4)x^4 + [(a_0a'_5) + (a_1a'_4)]x^3 + [(a_1a'_5) + (a_2a'_4)]x^2 + [(a_2a'_5) + (a_3a'_4)]x + (a_3a'_5) = 0,$$
$$(a_0a'_5)x^4 + (a_1a'_5)x^3 + (a_2a'_5)x^2 + (a_3a'_5)x + (a_4a'_5) = 0.$$

Wir haben auf diese Weise fünf Gleichungen erhalten, welche die Terme

$$x^4,\ x^3,\ x^2,\ x^1,\ x^0$$

linear in sich enthalten; die Elimination derselben giebt nach §. 12 die Gleichung

$$\begin{vmatrix} (a_0a'_1) & (a_0a'_2) & (a_0a'_3) & (a_0a'_4) & (a_0a'_5) \\ (a_0a'_2) & (a_0a'_3)+(a_1a'_2) & (a_0a'_4)+(a_1a'_3) & (a_0a'_5)+(a_1a'_4) & (a_1a'_5) \\ (a_0a'_3) & (a_0a'_4)+(a_1a'_3) & (a_0a'_5)+(a_1a'_4)+(a_2a'_3) & (a_1a'_5)+(a_2a'_4) & (a_2a'_5) \\ (a_0a'_4) & (a_0a'_5)+(a_1a'_4) & (a_1a'_5)+(a_2a'_4) & (a_2a'_5)+(a_3a'_4) & (a_3a'_5) \\ (a_0a'_5) & (a_1a'_5) & (a_2a'_5) & (a_3a'_5) & (a_4a'_5) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante hat den fünften Grad, während Sylvester's Methode eine solche vom doppelt so hohen oder zehnten Grade geliefert haben würde.

Hiemit ist dann der wichtige Satz gewonnen:

Die Resultante zweier algebraischer Gleichungen vom mten Grade ist eine Determinante desselben Grades, deren Elemente Summen zweireihiger Determinanten sind.

Aus der im Vorstehenden auseinandergesetzten Entstehungsweise der Resultante abstrahiren wir uns auch sofort das Bildungsgesetz ihrer Elemente, wobei uns die Symmetrie den Vortheil gewährt, statt m^2 Elementen blos deren

$$m + m - 1 + m - 2 + \ldots + 2 + 1 = \frac{m}{2}(m + 1)$$

berechnen zu müssen. Sind z. B. die beiden Gleichungen siebenten Grades

$$0x^7 + 1x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7 = 0,$$
$$0'x^7 + 1'x^6 + 2'x^5 + 3'x^4 + 4'x^3 + 5'x^2 + 6'x + 7' = 0$$

zur Elimination von x gegeben, wobei wir die Träger der Indices unterdrückt und blos letztre selbst angeschrieben haben, so können wir, da Ausdrücke von der Form

$$\begin{vmatrix} q & q' \\ q & q' \end{vmatrix} = 0$$

überhaupt nicht vorkommen können, statt (p, q′) sofort einfacher (p, q) setzen. Dann ergiebt uns der einfache Induktionsschluss, dass die Diagonalreihe der Resultante nach Sylvester-Cayley folgende sein wird:

(0 1), (0 3) + (1 2), (0 5) + (1 4) + (2 3), (0 7) + (1 6) + (2 5) + (3 4), (2 7) + (3 6) + (4 5), (4 7) + (5 6), (6 7).

Da mit der Diagonalreihe parallel laufenden Elementen-Serien aber sind folgende:

(0 2), (0 4) + (1 3), (0 6) + (1 5) + (2 4), (1 7) + (2 6) + (35), (3 7) + (4 6), (5 7);

(0 3), (0 5) + (2 4), (0 7) + (1 6) + (2 5), (2 7) + (3 6), (4 7);

(0 4), (0 6) + (1 5), (1 7) + (2 6), (3 7);

(0,5), (0 7) + (1 6), (2 7);

(0 6), (1 7);

(0 7).

Hiemit ist die resultirende Determinante selbst vollständig gegeben; das angewandte Bildungsverfahren lässt sich leicht allgemein verificiren.

§. 14. Zum Schluss dieses Kapitels möge noch gezeigt werden, dass der Gebrauch der Determinanten zur Behandlung der Systeme von Gleichungen nicht auf den Fall beschränkt ist, wo letztre entweder wirklich linear sind oder doch als solche angesehen werden können. Wir wollen die Resultante von m Gleichungen mit m Unbekannten zu bilden suchen, deren eine quadratisch ist, während die übrigen vom ersten Grade sein sollen. Dieses Problem hat Baur [28]) in umfassender Weise discutirt; wir folgen hier der übersichtlichen Darstellung von Versluys [29]).

Das System sei folgendes:

$$\begin{aligned} F \equiv\ & a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 + 2b_1x_1x_2 + 2b_2x_1x_3 \\ & + \ldots + 2b_{n!}\, x_{n-1}x_n = 0, \\ & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}\, x_n = 0, \\ & A_{12}x_2 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}\, x_n = 0, \\ & \vdots \\ & A_{n-1\,1}\, x + A_{n-1\,2}\, x_2 + \ldots + A_{n-1\,n}\, x_n = 0. \end{aligned}$$

Aus der quadratischen Gleichung denken wir uns die linearen Glieder bereits in bekannter Weise entfernt.

Differentiiren wir die Gleichung $F = 0$ partiell nach sämmtlichen in ihr vorkommenden Variablen, so erhalten wir n Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{dF}{dx_1} \equiv\ & a_1x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + \ldots b_{n-1}x_n = \lambda_1A_{11} + \lambda_2A_{12} \\ & + \ldots + \lambda_n\, A_{1n} \\ \frac{1}{2}\frac{dF}{dx_1} \equiv\ & b_1x_2 + a_2x_1 + b_nx_3 + \ldots b_{2n-1}x_n = \lambda_1A_{21} + \lambda_2A_{22} \\ & + \ldots + \lambda_n\, A_{2n} \\ & \vdots \\ \frac{1}{2}\frac{dF}{dx_n} \equiv\ & b_{n-1}x_n + b_{2n-1}x_1 + b_{3n-1}x_3 + \ldots + a_nx_n = \lambda_1A_{n-1\,1} \\ & + \lambda_2A_{n-1\,2} + \ldots + \lambda_n\, A_{n-1\,n}. \end{aligned}$$

Da das System von (n — 1) linearen Gleichungen die Verhältnisse der einzelnen Unbekannten unter der Cautel von §. 3 zu berechnen gestattet, so dürfen die Grössen

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n$$

als bekannt angenommen werden, und es gestatten also diese n Gleichungen die Bestimmung sämmtlicher n unbekannten Grössen.

Da es uns jedoch auf die Bestimmung der Resultante ankommt, so betrachten wir in den uns zu Gebote stehenden

$$n + n - 1 = 2n - 1$$

linearen Gleichungen sowohl die x, als auch die λ als Unbekannte, so dass es deren mithin im Ganzen 2n giebt. Dann ist nach §. 3 die Eliminationsgleichung folgende

$$\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\
b_1 & a_2 & b_n & \dots & b_{2n-1} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\
b_2 & b_n & a_3 & \dots & b_{3n-1} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
b_{n-1} & b_{2n-1} & b_{3n-1} & \dots & a_n & A_{n-1\,1} & A_{n-1\,2} & A_{n-1\,3} & \dots & A_{n-1\,n} \\
A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n-1\,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n-1\,2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n-1\,3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{n-1\,n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Geometrische Anwendungen dieses Resultates werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

Ganz neuerlich ist Gundelfinger [30]) noch um einen Schritt weiter gegangen und hat auch für ein aus zwei quadratischen und (n — 2) linearen Gleichungen zusammengesetztes n gliedriges Gleichungssystem elegante Auflösungsformeln gegeben.

1) Jacobi, De formatione et proprietatibus determinantium, Crelle's Journal f. d. reine u. angew. Math., 22. Band. S. 302.

2) Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867. S. 106.

3) Gauss, Opera ed. Schering, Tom. II. Göttingen 1870, S. 178.

4) v. Staudt, De numeris Bernoullianis, Erlangen 1845. S. 14.

5) Naegelsbach, Zur independenten Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., 19. Jahrg. S. 227.

6) Ibid. S. 229.

7) Fürstenau, Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coëfficienten, Marburg 1860.

8) Baltzer, Schlömilch's Zeitschr., Literaturzeitung, 6. Jahrg. S. 9.

9) Fürstenau, Neue Methode zur Darstellung und Berechnung imaginärer Wurzeln der Gleichungen, Marburg 1867.

10) Dietrich, Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunktionen, Crelle's Journal, 69. Band. S. 190 ff.

11) Lieblein, Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis, Prag 1867. S. 147 ff.

12) Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862. S. 44.

13) Arneth, Geschichte der reinen Mathematik, Stuttgart 1852. S. 238.

14) Fiedler, S. 78.

15) Weihrauch, Zur Determinantenlehre, Schlömilch's Zeitschr. 19. Jahrg. S. 359.

16) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Tom. II., Lausanne 1748. Cap. 19.

17) Minding, Entwickelung eines symmetrischen Ausdrucks für den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung, Crelle's Journal, 31. Band. S. 1 ff.

18) Sylvester, Philosophical Magazine 1840. N. 101.

19) Hesse, Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, Schlömilch's Zeitschr., 11. Jahrg. S. 416.

20) Björling, Sur les relations qui doivent exister entre les coëfficients d'un polynome F(x), pour qu'il contienne un facteur de la forme ($x^n - a^n$), Grunert's Archiv d. Math. u. Phys., 55. Theil. S. 434.

21) v. Zeipel, Determiner la relation qui doit exister entre les coëfficients d'un polynome, dont la lettre principale et x, pour que le polynome contienne un facteur de la forme ($x^n - a^n$), Nova acta reg. soc. scient. Upsal., ser III. vol. V.

22) Egen, Handbuch der allgemeinen Arithmetik, 2. Theil, Berlin 1849. S. 48.

23) Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1868. S. 421.

24) Cayley, Philosophical Transactions, CXLVII.

25) Fiedler, S. 110.

26) Sylvester, Philos. Transact., CXLIII.

27) Baur, Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear, Schlömilch's Zeitschr., 14. Jahrg. S. 129 ff.

28) Versluys, Applications des déterminants à l'algèbre et à la géométrie analytique, Grunert's Archiv, 53. Theil. S. 138.

29) Gundelfinger, Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter zwei quadratisch und die übrigen linear, Schlömilch's Zeitschr., 18. Jahrg. S. 543 ff.

Kapitel VI.

Kettenbruchdeterminanten.

§. 1. Als eine der wichtigsten Anwendungen der Determinantentheorie auf andere analytische Gegenstände hat sich in neuester Zeit die Darstellung eines Kettenbruches als Quotient zweier Determinanten herausgestellt. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung scheint zuerst von Ramus [1]) bemerkt worden sein; auch Spottiswoode [2]) und Heine [3]) wurden im Verlaufe anderweitiger Untersuchungen auf dieselbe geführt, ohne dass aus diesen gelegentlichen Hinweisungen der Wissenschaft ein eigentlicher Vortheil erwachsen wäre. Ganz neuerlich hob Thiele [4]) wieder den Nutzen einer solchen Darstellungsweise hervor, während bald darauf G. Bauer [5]) bei gewissen analytischen und Casorati [6]) bei physikalischen Problemen dieselbe mit bestem Erfolge anwandten. Eine systematische Darstellung dieses Wissenszweiges schliesslich ward unabhängig von Thiele [7]) und dem Verfasser [8]) dieses geliefert.

Um zu der hier angedeuteten Darstellung zu gelangen, bedürfen wir nur des Satzes, dass man, um einen Kettenbruch

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}$$

mit einer Zahl M zu multipliciren, lediglich den ersten Theilzähler b_1 mit dieser Zahl zu multipliciren brauche. Diess ist aber sofort einleuchtend; denn setzt man in bekannter Weise den Kettenbruch

$$\frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{p}{q},$$

so ist

$$M\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n}\right)=M.\frac{b_1}{a_1+\frac{p}{q}}=\frac{Mb_1}{a_1+\frac{p}{q}}=\frac{Mb_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n},$$

und diess war zu beweisen.

§. 2. Es sei nun folgendes System trinomischer recurrirender Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
a_1x_1 &- x_2 = b_1,\\
b_2x_1 &+ a_2x_2 - x_3 = 0,\\
b_3x_2 &+ a_3x_3 - x_4 = 0,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
b_nx_{n-1} &+ a_nx_n - x_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Aus einem solchen Systeme lässt sich, wie Euler [9]) nachgewiesen hat, das Verhältniss zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Unbekannter sofort in Gestalt eines Kettenbruches darstellen; sieht man momentan den Term b_1 als Unbekannte an, so ergiebt sich in Anwendung auf den vorliegenden Fall

$$\frac{x_1}{b_1}=\frac{1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n},$$

oder, indem man mit b_1 wegmultiplicirt,

$$x_1=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n}.$$

Berechnet man hingegen x_1 aus dem obigen Systeme nach den Regeln von §. 1 des vorigen Kapitels, so findet man

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \quad -1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \quad a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \quad -1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \quad a_n \end{vmatrix}}=\frac{P_n}{Q_n},$$

und es ist somit folgender Satz dargethan [10]):

Der n te Näherungswerth jedes Kettenbruches kann dargestellt werden als Quotient zweier Determinanten, die auf beiden Seiten der ersten Diagonalreihe je eine derselben parallele Serie von Elementen enthalten. Die Determinante im Zähler erhält man, wenn man die des Nenners nach dem ersten Theilnenner partiell differentiirt und diese Ableitung mit dem ersten Theilzähler multiplicirt.

Mit Zuziehung der obigen Bezeichnungsweise für den n ten Näherungszähler und Näherungsnenner erhält man nach Kap. II. §. 12

$$\frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1 \frac{dQ_n}{da_1}}{Q_n}.$$

§. 3. Die eben festgestellte Darstellungsweise der Kettenbrüche wollen wir sofort dazu anwenden, die Anzahl der Glieder zu bestimmen, aus welchen bei der gewöhnlichen recurrenten Berechnung die Aggregate P_n und Q_n sich zusammensetzen. Da P_n offenbar ebensoviele Glieder haben muss, wie Q_{n-1}, so brauchen wir nur die Näherungsnenner in's Auge zu fassen.

Ist s_t die Summe der t ten Wurzelpotenzen der Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

so besteht nach Kap. V. §. 8 folgende Relation:

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & . & . & . & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ ta_t & a_{t-1} & a_{t-2} & . & . & . & a_1 \end{vmatrix}.$$

Wendet man diess auf die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax = b$$

an, deren Wurzeln

$$x_1 = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right) \text{ und } x_2 = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)$$

sind, so erhält man zur Bestimmung des Quotienten

$$\frac{s_{t-1}}{s_t}$$

die Gleichung

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}} = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & .. & b\ a_{(t-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & .. & b\ a_{(t)} \end{vmatrix}}.$$

Bezeichnen wir nun in gewohnter Weise mit P_t und Q_t Nenner und Zähler des tten Näherungswerthes des Kettenbruches

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \dots,$$

so ist nach §. 2

$$Q_t = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & .. & b\ a_{(t)} \end{vmatrix}, \quad bQ_{t-1} = P_t = b \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & .. & b\ a_{(t-1)} \end{vmatrix}.$$

Gehen wir jetzt zu dem obigen Bruche zurück und zerlegen jede der beiden darin auftretenden Determinanten dadurch nach Kap. II. §. 8 in eine Summe, dass wir

$$2b = b + b$$

setzen, so findet sich leicht, dass

$$\frac{S_{t-1}}{S_t} = \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{t}} = \frac{Q_{t-1}+b\,Q_{t-3}}{Q_t+b\,Q_{t-2}}$$

ist. Durch Zerlegung der Determinante

$$Q_t = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \; a \end{vmatrix}_{(t)}$$

in Unterdeterminanten, vorgenommen nach den Elementen der letzten Zeile, lässt sich zeigen, dass

$$Q_t = aQ_{t-1} + bQ_{t-2}$$

und also

$$bQ_{t-3} = Q_{t-1} - aQ_{t-2}$$

sein muss. Durch Einsetzung der beiden linksstehenden Werthe in dem obigen Bruchausdrucke folgt

$$\frac{Q_{t-2}}{Q_{t-1}} = \frac{2 - a\frac{S_{t-1}}{S_t}}{a + 2b\frac{S_{t-1}}{S_t}},$$

oder da der Quotient $\frac{S_{t-1}}{S_t}$ bekannt ist,

$$\frac{Q_{t-2}}{Q_{t-1}} = \frac{2\left[\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^t + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^t\right]}{\begin{array}{l} -a\left[\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}\right] \\ a\left[\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + b}\right)^t + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^t\right] \\ +2b\left[\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}\right] \end{array}}.$$

Sowohl im Zähler, wie im Nenner, lässt sich hier bezüglich

$$\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} \text{ und } \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}$$

als gemeinschaftlicher Faktor einer Summe von Gliedern ansehen; setzt man diese Ausdrücke heraus, so erhält man durch eine einfache algebraische Transformation folgendes anscheinend zuerst von Stern [11]) in dieser Allgemeinheit angegebene Resultat:

$$\frac{Q_{t-2}}{Q_{t-1}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{P_{t-1}}{Q_{t-1}} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + b}\right)^{t} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t}}.$$

In analoger Weise ist natürlich

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{b}{a_{(t)}} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{t-1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{t} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{t}}.$$

Die hier entwickelte Formel kann nun zur Lösung des von uns oben angeregten Problems dienen. Aus der Relation

$$Q_t = aQ_{t-1} + bQ_{-2}$$

geht sofort hervor, dass wenn φ_k die Gliederanzahl für den k ten Näherungsnenner ist, dann

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varphi_{k-2}$$

sein muss. Wir haben demnach folgendes System trinomischer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \varphi_{t-1} + \varphi_{t-2} \\
\varphi_{t-1} &= \varphi_{t-2} + \varphi_{t-3} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\varphi_4 &= \varphi_3 + \varphi_2 \\
\varphi_3 &= \varphi_2 + \varphi_1,
\end{aligned}$$

und behandeln wie dasselbe so, wie das allgemeinere in §. 2, so fliesst daraus für $\frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_t}$ der Kettenbruch

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1_{(t)}}.$$

Da φ_{t-1} und φ_t prim gegen einander sind, so ist

$$\varphi_t = \begin{vmatrix} 1 & -1 & . & . & 0 \\ 1 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

oder mit Berücksichtigung der vorigen Schlussformel,

$$Q_t = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t-1}}{\sqrt{5}}.$$

Dass diess wirklich eine ganze Zahl ist, lehrt die Anwendung des binomischen Lehrsatzes.

§. 4. Als den Fundamentalsatz der Lehre von den Kettenbrüchen bezeichnet man gewöhnlich denjenigen, in welchem die Relation

$$D = P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = \pm b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n$$

bewiesen wird. Den Beweis dieses Satzes können wir mit Hülfe der Determinanten in folgender eleganter Weise führen.

Wir haben

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b_n & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Bilden wir diese Produkte nach Kap. II. §. 20, so erhalten wir D gleich

$$
\begin{vmatrix}
b_1a_1 & b_1b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_2 & a_2^2+1 & a_2b_3-a_3 & -b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-b_3 & a_2b_3-a_3 & a_3^2+b_3^2+1 & a_3b_4-a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -b_4 & a_3b_4-a_4 & a_4^2+b_4^2+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & -b_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-3} & a^2_{n-2}+b^2_{n-2}+1 & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{n-1} & a_{n-2}a_{n-1}-a_{n-1} & a^2_{n-1}+b^2_{n-1}+1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_n & a_{n-1}b_n-a_n & a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
-\begin{vmatrix}
b_1a_1 & b_1b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_2 & a_2^2+1 & a_2b_3-a_3 & -b_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-b_3 & a_2b_3-a_3 & a_3^2+b_3^2+1 & a_3b_4-a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -b_4 & a_3b_4-a_4 & a_4^2+b_4^2+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-3} & -b_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & a_2^{n-2}+b^2_{n-2}+1 & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & -b_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & a^2_{n-1}+b^2_{n-1}+1 & a_{n-1}b_n-a_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & a_n
\end{vmatrix}
$$

Diese beiden Determinanten sind offenbar in allen Stücken identisch, nur dass bezüglich die letzten Zeilen und Columnen mit einander vertauscht sind. Nennen wir also die erste derselben Δ, die zweite Δ', so ist ersichtlich

$$\frac{d\Delta}{da_n} = \frac{d\Delta'}{da_n}.$$

Indem wir Δ nach den Elementen der letzten Colonne, hingegen Δ' nach den Elementen der letzten Zeile in Unterdeterminanten zerlegen und wirklich subtrahiren, heben sich die ersten Glieder der Zerlegung gegenseitig auf und man findet

$$D = \begin{vmatrix} b_1a_1 & b_1b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & a_2b_3-a_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & a_2b_3-a_3 & a_3^2+b_3^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-3} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-3} & a^2_{n-2}+b^2_{n-2}+1 & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_n & a_{n-1}b_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} b_1a_1 & b_1b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a^2_2+1 & a_2b_3-a_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & a_2b_3-a_3 & a^2_3+b^2_3+1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-3} & a^2_{n-2}+b^2_{n-2}+1 & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & -b_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1}b_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \Delta'' - \Delta'''.$$

Diese beiden Dete$_2$minanten befolgen ein analoges Bildungsgesetz wie die beiden obigen, Δ und Δ', und es ist wiederum

$$\frac{d\Delta''}{d(a_{n-1}b_n - a_n)} = \frac{d\Delta'''}{d(a_{n-1}b_n - a_n)}.$$

Zerlegt man also wiederum im nämlichen Sinne in Unterdeterminanten und bildet die Differenz, so bleibt eine Determinante des (n — 2)ten Grades zurück, vor die der Faktor b_n getreten ist, und führt man in analoger Weise noch (n — 4) Zerlegungen aus,

so wird das Resultat eine Determinante vom 2ten Grade sein, multiplicirt mit dem Faktor

$$(-1)^{n-3}\ b_4 b_5 b_6 \ldots b_{n-1} b_n .$$

Jene Determinante zweiten Grades ist aber die folgende:

$$\begin{vmatrix} b_1 a_1 & b_1 b_2 \\ -b_3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2\ b_3 b_1 b_2,$$

und es ist demnach die gesuchte Differenz

$$D = (-1)^{n-1}\ b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n ,$$

wie oben behauptet wurde.

§. 5. In diesem Paragraphen möge eine Reihe von Anwendungen der Determinantendarstellung aufgestellt werden, welche deren Vorzüge besonders in's Licht zu setzen geeignet scheinen.

a) Bekanntlich gilt der Satz, dass man, ohne den Werth eines Kettenbruches zu ändern, zwei beliebige Theilnenner und den zwischenliegenden Theilzähler mit der nämlichen Zahl $M\left(\gtrless 0\right)$ multipliciren dürfe. Denn es ist offenbar [12])

$$\frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}} + \frac{b_r}{a_r} + \ldots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{M\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & b_{r-1}\ a_{r-1}\ b_r & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n\ a_n \end{vmatrix}}{M\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & b_{r-1}\ a_{r-1}\ b_r & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n\ a_n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & Mb_{r-1}\ Ma_{r-1}\ Mb_r & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n\ a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & Mb_{r-1}\ Ma_{r-1}\ Mb_r & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n\ a_n \end{vmatrix}},$$

und schreibt man den letzten Determinantenquotienten wieder als Kettenbruch, so ist derselbe der nachstehende:

$$\frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{Mb_{r-1}}{Ma_{r-1}} + \frac{Mb_r}{a_r} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}.$$

b) Gesetzt, man wolle den Werth des Kettenbruches [13])

$$K = \frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}} + \frac{0}{a_r} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}$$

bestimmen, dessen r ter Theilzähler durch Null ersetzt ist, so schreiben wir denselben in Determinantenform. Es ist

$$K = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{r-1} & a_{r-1} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{r-1} & a_{r-1} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}},$$

und wendet man auf jede dieser beiden Determinanten das Laplace'sche Theorem an, so ergiebt sich, wofern nur

$$\begin{vmatrix} a_r & -1 & \ldots & 0 \\ b_{r+1} & a_{r+1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, der Kettenbruch K gleich

$$\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{r-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{r-1} \end{vmatrix}} = \frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_{r-1}}{a_{r-1}}.$$

c) Bei dioptrischen Untersuchungen bedarf man des Lemma's, dass die Kettenbrüche

$$\frac{M}{a_1} + \frac{M}{a_2} + \ldots + \frac{M}{a_n} \quad \text{und} \quad \frac{M}{a_n} + \frac{M}{a_{n-1}} + \ldots + \frac{M}{a_1}$$

gleiche Nenner N′ und N″ ergeben [14]).

Nun ist

$$N' = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ M & a_2 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & M & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & M & a_n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad N'' = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ M & a_{n-1} & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & M & a_{n-2} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & M & a_1 \end{vmatrix}.$$

Dass aber diese beiden Determinanten einander gleich sind, erhellt sofort aus Kap. II. §. 2.

d) Der independente Ausdruck für den Kettenbruch

$$\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} - \ldots - \frac{b_n}{a_n}$$

ist der folgende

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & b_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Diess würde sich leicht durch das Vorhergehende beweisen lassen, indessen kann man sich auch leicht unmittelbar davon überzeugen. Für jeden solchen Kettenbruch gilt bekanntlich die Recursionsformel

$$Q_n = a_n Q_{n-1} - b_n Q_{n-2},$$

und eine entsprechende auch für die Zähler. Wir nehmen nun an, es sei wirklich

$$Q_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{n-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & b_{n-2} & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}, \quad Q_{n-2} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{n-3} & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

Zerlegen wir alsdann

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & b_{n-1} & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der letzten Zeile in Unterdeterminanten, so ist mit Rücksicht auf Kap. II. §. 5 sofort

$$\triangle = a_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= a_n Q_{n-1} - b_n Q_{n-2},$$

also auch

$$\triangle = Q_n .$$

Entsprechend gestaltet sich der Beweis für P_n.

e) Für den tten Näherungswerth des einfach periodischen Kettenbruches

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots$$

fanden wir oben (§. 3) den Ausdruck

$$L = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^t - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^t}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t+1}}.$$

Gesetzt nun, es sei $b = -1$, $a = 2$, so würde dieser Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen; wir wären also nicht im Stande, den Werth des Kettenbruches

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2_{(t)}}$$

ohne weiteres anzugeben. Hier zeigt uns nun die independente Darstellungsweise einen einfachen Ausweg.

In Kap. III. §. 10 leiteten wir die Formel

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & \binom{m}{0} & 0 & \ldots & 0 \\ \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & \binom{m}{0} & \ldots & 0 \\ \binom{m}{3} & \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m}{r+1} & \binom{m}{r} & \binom{m}{r-1} & \ldots & \binom{m}{1} \end{vmatrix} = \binom{m+r}{r+1}$$

ab. Da nun $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$ ist, so können wir dem vorigen Abschnitt zufolge unsren Kettenbruch folgendermassen schreiben:

$$\frac{\begin{vmatrix} 2 & \binom{2}{0} & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{2}{2} \; 2_{(t-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & \binom{2}{0} & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{2}{2} \; 2_{(t)} \end{vmatrix}},$$

und dieser Determinantenquotient hat den Werth

$$-\frac{\binom{t}{t-1}}{\binom{t+1}{t}} = -\frac{t}{t+1}.$$

§. 6. Betrachten wir den Ausdruck genauer, welchen wir oben mit K bezeichneten, und lassen wir darin t unendlich gross werden. Dass dieser Grenzübergang ein endliches Resultat liefern muss, geht sofort aus der Ueberlegung hervor, dass der jenem Ausdruck gleiche Kettenbruch

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots,$$

in's Unendliche fortgesetzt, den für die Kettenbrüche bestehenden Convergenzregeln zufolge einen endlichen Werth annimmt. Man findet

$$\lim_{t=\infty} L = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}.$$

Dieses Resultat kann man auch auf folgende Art erhalten. Die kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung

$$x^2 - ax = b$$

hat den Werth

$$x' = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\,.$$

Durch Anwendung der Fürstenau'schen Methode (s. o. Kap. V. §. 6) findet sich hingegen

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -b & a & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -b & a & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -b & a^{(\infty-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -b & a & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & -b & a & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -b & a^{(\infty)} \end{vmatrix}}.$$

Multiplicirt man jede Colonne des Zählers und Nenners mit (— 1), so folgt durch Gleichsetzung der beiden für x′ gefundenen Ausdrücke

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \ldots\,,$$

was für den unendlichen Kettenbruch die nämliche Summenformel liefert.

Der hier entwickelte einfach periodische Kettenbruch kann ersichtlich zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln verwandt werden. Am einfachsten gestaltet sich diess Verfahren, wenn wir unter dem Wurzelzeichen statt einer Summe eine Differenz annehmen und einen bis jetzt anscheinend nicht bekannten Satz zu Grunde legen, dessen Ableitung durch Determinanten besonders bequem ist.

Dem Obigen zufolge ist, wenn b = (— c) gesetzt wird,

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - c} = \frac{a}{2} = \frac{c}{a} - \frac{c}{a} - \ldots$$

Ist dann wieder bezüglich Q_k und P_k der k te Näherungsnenner und Näherungszähler dieses Kettenbruches, so ist nach §. 2

$$Q_{2n} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \\ & & & & & & {\scriptstyle (2n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{c} & a & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & a \\ & & & & & & {\scriptstyle (2n)} \end{vmatrix},$$

indem ja $\sqrt{c}\sqrt{c}$ den Werth C wiedergiebt.

Diese orthosymmetrische Determinante behandeln wir nun in der Weise weiter, dass wir zur ersten Zeile die letzte, zur zweiten die vorletzte, und allgemein zur q ten die $(2n - (q - 1))$te addiren, wobei q nicht grösser als n sein darf. Dann ist

$$Q_{2n} = \begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & a \\ \sqrt{c} & a & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} \\ 0 & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & \underset{(n)}{a+\sqrt{c}} & a+\sqrt{c} & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} & \dots & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & \underset{(2n)}{a} \end{vmatrix}.$$

Nunmehr subtrahiren wir von jeder q ten die $(2n-(q-1))$te Colonne; alsdann verschwinden alle Elemente, welche die ersten n Zeilen mit den ersten n Colonnen gemein haben, und es ist nach Laplace's Satz Q_{2n} gleich folgendem Produkte

$$- \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sqrt{c} & \sqrt{c}-a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{c} & -a & -\sqrt{c} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & -\sqrt{c} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\sqrt{c} & -a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{c} & -a & -\sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a & -\sqrt{c} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{c} & a \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & \sqrt{c} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{c} & a & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{c} & a & \sqrt{c} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a+\sqrt{c} & \sqrt{c} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zieht man Kap. II. §. 8 in Betracht und zerlegt bezüglich nach den Elementen der letzten und ersten Colonne beide Faktoren in Unterdeterminanten, so folgt zum Schluss Q_n gleich

$$\left[(a-\sqrt{c})\begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & \ldots & 0 \\ \sqrt{c} & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix}_{(n-1)} - c\begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & \ldots & 0 \\ \sqrt{c} & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix}_{(n-2)}\right] \times$$

$$\left[(a+\sqrt{c})\begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & \ldots & a \\ \sqrt{c} & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix}_{(n-1)} - c\begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & \ldots & 0 \\ \sqrt{c} & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix}_{(n-2)}\right],$$

und durch Ausrechnung

$$Q_{2n} = (aQ_{n-1} - cQ_{n-2})^2 - cQ^2_{n-1}.$$

Da aber dem Bildungsgesetze unsres Kettenbruches gemäss

$$Q_n = aQ_{n-1} - cQ_{n-2}$$

ist, so ist

$$Q_{2n} = Q^2_n - cQ^2_{n-1}.$$

Da $P_{2n} = bQ_{2n-1}$ ist, so kann auch P_{2n} als orthosymmetrische Determinante dargestellt werden; dieselbe ist zwar von ungeradem Grade, lässt sich nach Zehfuss [15]) jedoch in ganz analoger Weise in ein Produkt zweier Determinanten vom nten und $(n-1)$ten Grade zerlegen, und es ergiebt sich

$$P_{2n} = b(aQ^2_{n-1} - 2cQ_{n-1}\,Q_n).$$

Kennt man also von einem solchen Kettenbruche den Näherungswerth

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{cQ_{n-1}}{Q_n},$$

so kennt man durch diese Relationen auch den Näherungswerth

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{c(aQ^2_{n-1} - 2cQ_{n-1}\,Q_n)}{Q^2_n - cQ^2_{n-1}}.$$

so dass also, wenn nur n hinlänglich gross genommen wird, die Berechnung der Quadratwurzel mit grosser Genauigkeit erfolgen kann.

§. 7. Man kann sich nun noch die Frage vorlegen, wie der Quotient zweier Determinanten beschaffen sein muss, um unmittelbar seine Ueberführung in einen Kettenbruch zu gestatten. Zu diesem Zwecke beweisen wir folgenden Lehrsatz [16]):

Soll der Quotient zweier Determinanten

$$\frac{M}{N} = -\frac{M}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

ohne weiteres in einen Kettenbruch sich umwandeln lassen, so ist die nothwendige aber auch genügende Bedingung hiefür das Bestehen einer der folgenden vier Relationen:

$$M = \frac{dN}{da_{11}}, \quad M = \frac{dN}{a_{1n}}, \quad M = \frac{dN}{da_{n1}}, \quad M = \frac{dN}{da_{nn}}.$$

Wir brauchen natürlich nur einen, etwa den ersten dieser Theilsätze, zu beweisen.

Wir geben dem Zähler nachstehende Form:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir nun die letzte Colonne mit a_{1n-1}, die vorletzte mit a_{1n} sowohl in M, als in N, so ersetzt sich durch Subtraktion der vorletzten von der letzten Colonne das Element a_{1n} durch eine Null. Ganz ebenso können wir aber auch alle folgenden Elemente:

$$a_{2n} \cdot \cdot \cdot a_{n-2\,n}\,;\ a_{1n-1} \cdot \cdot \cdot a_{n-3\,n-1}\,;\ \cdot \cdot \cdot a_{14}\ a_{24}\,;\ a_{13}$$

durch Nullen ersetzen und erhalten dann unsren Quotienten in folgender Gestalt:

$$\frac{M}{N} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & P_1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & Q_1 & P_2 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & R_1 & Q_2 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_{n-2\,2} & U_1 & S_2 & . & . & Q_{n-4} & P_{n-3} & Y_{n-2} \\ 0 & a_{n-1\,2} & T_1 & U_2 & . & . & R_{n-4} & Q_{n-3} & P_{n-2} \\ 0 & a_{n2} & V_1 & T_2 & . & . & X_{n-4} & R_{n-3} & Q_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & P_1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & Q_1 & P_2 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & R_1 & Q_2 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n-2\,1} & a_{n-2\,2} & U_1 & S_2 & . & . & Q_{n-4} & P_{n-3} & Y_{n-2} \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & T_1 & U_2 & . & . & R_{n-4} & Q_{n-3} & P_{n-2} \\ a_{n1} & a_{n2} & V_1 & T_2 & . & . & X_{n-4} & R_{n-3} & Q_{n-2} \end{vmatrix}},$$

indem alle bei der Multiplikation vor die Determinanten heraustretenden Faktoren sich im Zähler und Nenner wegheben. Hierauf schreiben wir den Zähler folgendermassen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & P_1 & . & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & Q_1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & V_1 & . & . & Q_{n-2} \end{vmatrix},$$

und verfahren zur linken Seite der ersten Diagonalreihe ganz ebenso, wie wir es vorher zu ihrer rechten thaten. Hiedurch erhalten wir

$$\frac{M}{N} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix}},$$

und da, wie man sofort einsieht,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & . & . & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & -\beta_2 & . & . & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ \beta_1\gamma_1 & \alpha_2 & -1 & . & . & 0 \\ 0 & \beta_2\gamma_2 & \alpha_3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \alpha_n \end{vmatrix}$$

ist, so ist unser Quotient $\frac{M}{N}$ gleich dem Kettenbruche:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_2} + \frac{\beta_2\gamma_2}{\alpha_3} + \ldots + \frac{\beta_{n-1}\gamma_{n-1}}{\alpha_n}.$$

So ist beispielsweise

$$\frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_3 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_3 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ a_2b_2-a_3b_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ 0 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1b_3-a_3b_1 & b_1 & 0 \\ a_2b_3-a_3b_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ 0 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{b_3}{a_1b_3-a_3b_1} - \frac{b_1(a_2b_3-a_3b_2)}{b_2} \cdot \frac{b_3(c_2b_1-c_1b_2)}{c_2b_1-c_1b_3}.$$

Gestützt auf das hier Gesagte können wir nun auch die in Kap. V. §. 6 offen gelassene Frage einfach entscheiden, ob nämlich in der That die wahre Wurzel einer Gleichung zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Näherungswerthen der Fürstenau'schen Entwickelung enthalten sei [17]). Die dort erwähnten Quotienten genügen der im obigen Lehrsatze aufgestellten Bedingung, und es kann demnach das Verhältniss zweier solcher unendlichen Determinanten als unendlicher aber convergirender Kettenbruch dargestellt

werden. Dass aber von den Näherungsbrüchen eines Kettenbruches jenes Gesetz gilt, ist anderweitig bekannt [18]).

§. 8. Seit Euler's Zeit, und besonders durch seine umfassenden Forschungen in diesem Gebiete angeregt, haben sich die Analytiker mit Vorliebe den Problemen zugewandt, welche den Zusammenhang zwischen den Kettenbrüchen und den andren Gebilden der Analysis, Produkten und Reihen, darzulegen bestimmt sind. Als Schlusssteine der hierauf gerichteten Bemühungen dürfen wir die eleganten Transformationsmethoden betrachten, durch welche Heine [19]) und Hankel [20]) gewisse Kettenbrüche in Reihen verwandelten, welche nach positiven und negativen Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Obschon die Kunstgriffe, durch welche in beiden Fällen die betreffende Umwandlung erreicht wurde, scheinbar von einander verschieden sind, so stammt doch die Ableitung beider Verfahrungsweisen aus einer gemeinsamen Quelle. Eine ähnliche Behandlung der umgekehrten Aufgaben hat nun Nachreiner [21]) vermittelst der Determinanten in eleganter Weise gegeben, ohne jedoch, wie es wenigstens scheint, die Analogie seiner Methode mit denen der genannten Mathematiker zu bemerken.

Wir nehmen zuerst den zweiten Theil der Aufgabe vor und verwandeln den unendlichen (jedoch selbstverständlich als convergent vorausgesetzten) Kettenbruch

$$\frac{1}{x+a_0} - \frac{1}{x+a_1} - \frac{1}{x+a_2} - \ldots$$

in eine Reihe von der Form

$$\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x^3} + \ldots$$

Ist Q_n der n te Näherungsnenner jedes Kettenbruches, so besteht, wie wir sahen, die Relation

$$Q_n = \begin{vmatrix} x+a_0 & \sqrt{b_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_1} & x+a_1 & \sqrt{b_2} & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_2} & x+a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{b_n}\ x+a_n \end{vmatrix}.$$

Eine derartige Determinante können wir nach Kap. II. §. 16 in eine endliche nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe

umsetzen, und zwar erhalten wir, wenn wir mit Q'_n das bezeichnen, was aus Q_n für $x = 0$ wird,

$$Q_n = Q'_n + x\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dQ'_n}{da_k} + x^2 \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=n} \frac{d^2Q'_n}{da_k\, da_l} + \ldots + x^{n+1}$$

Es ist aber

$$\frac{dQ'_n}{da_k} = \begin{vmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \sqrt{b}_{k-1} & a_{k-1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & a_{k+1} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & a_n \end{vmatrix},$$

und mit Anwendung des Laplace'schen Satzes

$$\frac{dQ'_n}{da_k} = Q'_{0,\,k-1} \cdot Q'_{k+1,\,n},$$

indem allgemein unter $Q'_{p,\,q}$ diejenige Unterdeterminante von Q'_n verstanden werden soll, welcher das Diagonalglied

$$a_p \ . \ . \ . \ a_q$$

zukommt.

Entsprechend findet sich

$$\frac{d^2Q'_n}{da_k\, da_l} = Q'_{0,\,k-1} \cdot Q'_{k+1,\,l-1} \cdot Q'_{l+1,\,n},$$

$$\frac{d^3Q'_n}{da_k\, da_l\, da_m} = Q'_{0,\,k+1} \cdot Q'_{k+1,\,l-1} \cdot Q'_{l+1,\,m-1} \cdot Q'_{m+1,\,n},$$

$$\frac{d^4Q'_n}{da_k\, da_l\, da_m\, da_r} = Q'_{0,\,k-1} \cdot Q'_{k+1,\,l-1} \cdot Q_{l+1,\,m-1} \cdot Q'_{m+1,\,r-1} \cdot Q'_{r+1,\,n}.$$

Das Fortschreitungsgesetz dieser Ausdrücke liegt am Tage, und man findet

$$Q_n = Q'_n + x\sum_{k=1}^{k=n} Q'_{0,\,k-1}\, Q'_{k+1,\,n} + x^2 \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=n} Q'_{0,\,k-1}\, Q'_{k+1,\,l-1}\, Q'_{l+1,\,n} + \ldots + x^{n+1},$$

und entsprechend, woferne nur P_n und P'_n für den Zähler die analoge Bedeutung haben,

$$P_n = P'_n + x\sum_{k=1}^{k=n} P'_{1,\,k-1}\, P'_{k+1,\,n} + x^2 \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=n} P'_{1,\,k-1}\, P'_{k+1,\,l-1}\, P'_{l+1,\,n} + \ldots + x^n.$$

Dividirt man P_n durch Q_n, so ist das Resultat folgendes:

$$v_n = \frac{P'_n + xS_{k=1}^{k=n} P'_{1,\,k-1}\, P'_{k+1,\,n} + \ldots + x^n}{Q'_n + xS_{k=1}^{k=n} Q'_{0,\,k-1}\, Q'_{k+1,\,n} + \ldots + x^{n+1}}.$$

Es ist somit ein Kettenbruch von n Gliedern als Quotient zweier ganzen Polynome vom bezüglich nten und (n + 1)ten Grade dargestellt.

Bezeichnen wir jetzt allgemein durch

$$c^n_q$$

den Coëfficienten von x^q bei der im Nenner stehenden Reihe, so liefert das im Vorstehenden erörterte Bildungsgesetz dieser Grössen c folgende Gleichung

$$c_0{}^n A_0 + c_1{}^n A_1 \ldots c_n{}^n A_n = 0.$$

Diese Gleichung bleibt offenbar auch bestehen, wenn jeder Index um eine Einheit erhöht wird; es sind also folgende n + Gleichungen vorhanden:

$$\begin{aligned}
&{}^n_0 A_0 + {}^n_1 A_1 + \ldots + {}^n_n A_n = 0\\
&{}^n_0 A_1 + {}^n_1 A_2 + \ldots + {}^n_n A_{n+1} = 0\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&{}^n_0 A_{n-1} + {}^n_1 A_n + \ldots + {}^n_n A_{2n-1} = 0.
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind die c bekannte, die A unbekannte Grössen. Gesetzt nun, es seien die Terme

$$A_0,\ A_1 \ldots A_{n-3},\ A_{n-2}$$

bekannt, so kann man aus dem Systeme die noch übrigen $(2n - 1 - n + 1) = n$ Grössen A nach Kap. V. §. 1 berechnen, und zwar hat, wie man sich sofort überzeugt, die alsdann im Nenner auftretende Determinante die für die praktische Berechnung höchst bequeme Eigenschaft, sich auf ihr Diagonalglied zu reduciren.

Hankel (s. o.) hat, wie gesagt, die umgekehrte Aufgabe discutirt; für ihn waren also die Grössen A bekannt, die Grössen c unbekannt. Er entnimmt dem obigen Systeme, welches also jetzt homogen ist, für c^n_n den Werth

$$\omega_n \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & . & . & A_{n-1} \\ A_1 & A_2 & . & . & A_n \\ . & . & . & . & . \\ A_{n-1} & A_n & . & . & A_{2n-1} \end{vmatrix},$$

und zeigt, dass je zwei aufeinanderfolgende ω durch die Relation

$$\omega_n \, \omega_{n+1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & . & . & A_n \\ A_1 & A_0 & . & . & A_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ A_n & A_{n+1} & . & . & A_{2n} \end{vmatrix}}$$

an einander geknüpft sind.

Die hier durchgeführten Behandlungen der Transformationsaufgabe und ihrer Converse haben also das mit einander gemein, dass bei einer jeden gewisse recurrente Berechnungen der independenten Bestimmung der übrigen voraufgehen müssen. Das erstemal muss wenigstens A_0 und A_1, das zweitemal ω_1 bekannt sein.

§. 9. Im Anschluss an das Obige möge noch gezeigt werden, wie man nach Nachreiner [22]) den Kettenbruch

$$1 - \frac{a_1 x}{1} - \frac{a_2 x}{1} - \ldots - \frac{a_n x}{1}$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln kann.

Man hat

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & x & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x & . & . & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & x \\ 0 & 0 & . & . & a_n & 1 \end{vmatrix}}.$$

Vertauscht man sämmtliche Colonnen im Zähler und Nenner solange miteinander, bis die erste zur letzten geworden ist, so wird

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & . & . & 0 & a_1 \\ a_2 & 1 & x & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & x & . & . & 0 & a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & x & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix}}.$$

Um auch hier den im Kap. II. §. 16 aufgestellten Satz in Anwendung bringen zu können, braucht man nur dem Zähler etwa folgende Form zu geben:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & . & . & 0 & a_1 \\ a_2 & 1 & x & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & x & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & x \end{vmatrix},$$

und dem Nenner eine entsprechende; dann ist

$$P_n = P'_n + x \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{dP_n}{dx_k}\right)_{x=0} + x^2 \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{d^2P_n}{dx_k\, dx_l}\right)_{x=0} + \ldots$$

Drückt man den Coëfficienten von x wieder in Determinantenform aus, so ist derselbe

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a_k & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & a_n & 1 \end{vmatrix},$$

und diess ist nach Kap. II. §. 5 $= (-a_k)$. In gleicher Weise erhält man für die weitren Potenzen von x als Coëfficienten die Werthe $a_k a_l$, $-a_k a_l a_m$ etc., durch Substitution dieser Werthe bekommt man

$$P_n = 1 - x\,Sa_k + x^2\,SSa_k a_l - \ldots$$

Ist $k < l < m$ etc., so ergiebt sich aus der Entwickelung der einzelnen Differentialquotienten, dass die Grenzen der obigen Summenausdrücke nicht mehr allenthalben gleich 1 sind; man hat vielmehr

$$P_n = 1 - x \sum_{k=1}^{k=n} a_k + x^2 \sum_{k=1}^{k=n-2} \sum_{l=k+2}^{l=n} Sa_k a_l - x^3 \sum_{k=1}^{k=n-4} \sum_{l=k+2}^{l=n-2} \sum_{m=l+2}^{m=n} Sa_k a_l a_m + \ldots;$$

und ebenso ist

$$Q_n = 1 - x \sum_{k=2}^{k=n} a_k + x^2 \sum_{k=2}^{k=n-2} \sum_{l=k+2}^{l=n} Sa_k a_l - x^3 \sum_{k=2}^{k=n-4} \sum_{l=k+2}^{l=n-2} \sum_{m=l+2}^{m=n} Sa_k a_l a_m + \ldots$$

Dividirt man P_n durch Q_n, so erhält man den obigen Kettenbruch als rationale gebrochne Funktion von x dargestellt, deren Verwandlung in eine Reihe nach Kap. V. §. 7 sofort erfolgen kann.

§. 10. Zum Schlusse dieses Kapitels möge noch die Betrachtung einer gewissen analytischen Form folgen, welche mit den Kettenbrüchen auf's innigste verwandt ist; wir meinen die sogenannten aufsteigenden Kettenbrüche. Obschon bereits von dem Araber Al-Kalsadi [23]) entdeckt und auch dem grössten Mathematiker des Mittelalters, Leonardo Fibonacci [24]) bekannt, blieben dieselben gleichwohl bis in die neueste Zeit hinein unbeachtet; erst vor Kurzem begannen ziemlich gleichzeitig Druckenmüller [25]), Heis [26]), Kunze [27]) und ganz neuerlich Lembkes [28]) sich mit ihnen zu beschäftigen. Es erhellt sofort, dass der Nenner des aufsteigenden Kettenbruches

$$\frac{M}{N} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}$$

den Werth

$$N = a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$$

erhält; im Folgenden soll nun auch [29]) der Zähler in independenter Form gegeben werden.

Betrachten wir etwa den dritten Näherungszähler von $\frac{M}{N}$, so ist derselbe

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_2 a_3 b_1 + a_3 b_2 + b_3,$$

und hieraus ziehen wir folgenden Satz:

Der Zähler des Kettenbruches

$$\frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_n}{a_n}$$

ist gleich der Determinante

$$P_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Den Beweis führen wir durch Induktion. Zerlegen wir die Determinante P_n nach den Elementen der letzten Zeile in erste Unterdeterminanten, so folgt

$$P_n = a_n \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix} + (-b_n)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_3 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)}.$$

Die erste Determinante ist offenbar $= P_{n-1}$, die zweite hat den Werth

$$(-1)^{n-1}$$

nach Kap. II. §. 5, so dass demnach die Relation

$$P_n = a_n P_{n-1} + (-1)^{n-1+n-1} b_n = a_n P_{n-1} + b_n$$

gewonnen ist. Diess ist nun aber das Bildungsgesetz der Näherungszähler eines aufsteigenden Kettenbruches, und da für $n = 3$ die Wahrheit des aufgestellten Satzes bereits vorliegt, so gilt derselbe für jedes beliebige n.

Ist z. B. allgemein

$$a_q = 1,\ q \geqq 1 \leqq n,$$

so muss offenbar

$$P_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

sein. Diess zeigt auch sofort eine Determinantenbetrachtung; denn addiren wir in der obigen Determinante für P_n in diesem Falle sämmtliche Zeilen zur ersten, so nimmt dieselbe folgende Form an

$$\begin{vmatrix} b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

und dass diese Determinante sich auf das erste Element der ersten Zeile reduciren muss, ist sofort evident.

1) Ramus, Determinanternes Anvendelse til at bes temme Loven for de convergerende Bröker, Det Kong. Danske Videnskab. Selsk., naturv. og math. Afhandl. Kjoebenhavn 1855. S. 106.

2) Spottiswoode, Elementary Theorems relating to Determinants, Crelle's Journal f. d. reine u. angew. Math., 51. Band. S. 374.

3) Heine, Einige Eigenschaften der Lamé'schen Funktionen, Crelle's Journal, 56. Band. S. 97.

4) Thiele, Bemarkning om Kjaedebroker, Tidsskrift for Mathematik, udgivet a C. Tychsen, V. S. 144.

5) G. Bauer, Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis, München 1872.

6) Casorati, Le proprieta cardinali degli strumenti ottici anche non centrati, Milano 1872. S. 73.

7) Thiele, Den endelige Kjaedebröks-Funktions Theori, Tychsen Tidsskrift, VI. S. 145.

8) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873.

9) Euler, Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 1779.

10) Günther, S. 32.

11) Stern, Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, Berlin 1834. S. 10.

12) Günther, S. 36.

13) Ibid. S. 61.

14) Ibid. S. 83.

15) Zehfuss, Zwei Sätze über Determinanten, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., 7. Jahrgang. S. 438.

16) Günther, Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche, Grunert's Archiv d. Math. u. Phys., 54. Theil. S. 397.

17) Günther, Ueber die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche, Mathematische Annalen, 7. Band. S. 267.

18) Stern, S. 15.

19) Heine, Ueber eine gewisse Reihe von allgemeiner Form, Crelle's Journal, 34. Theil. S. 294.

20) Hankel, Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche, Sitzungsber. u. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissschftn, 1862. S. 17.

21) Nachreiner, Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen, München 1872. S. 19.

22) Ibid. S. 20 ff.

23) Hankel, Storia delle matematiche presso gli Arabi, Estratto dal bullettino etc. di Boncompagni, Tomo V. S. 30.

24) Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche, Weissenburg 1872. S. 2.

25) Druckenmüller, Theorie der Kettenreihen, Trier 1854.

26) Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, Köln und Wien 1864. S. 318 ff.

27) A. Kunze, Die aufsteigenden Kettenbrüche, Weimar 1857.

28) Lembkes, Theoria fractionum ascendentium, Monasterii 1870.

29) Günther, Darstellung etc. S. 41 ff.

Kapitel VII.

Geometrische Anwendungen.

§. 1. Gegeben sei ein Dreieck A B C (s. d. Fig.) mit den drei Seiten AB = c, BC = a, CA = b. Die Coordinaten der Eckpunkte, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem x0y sollen bezüglich x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 sein; es soll der Inhalt des Dreiecks einmal durch die Coordinaten seiner Ecken, dann aber auch als Funktion der drei Seiten dargestellt werden.

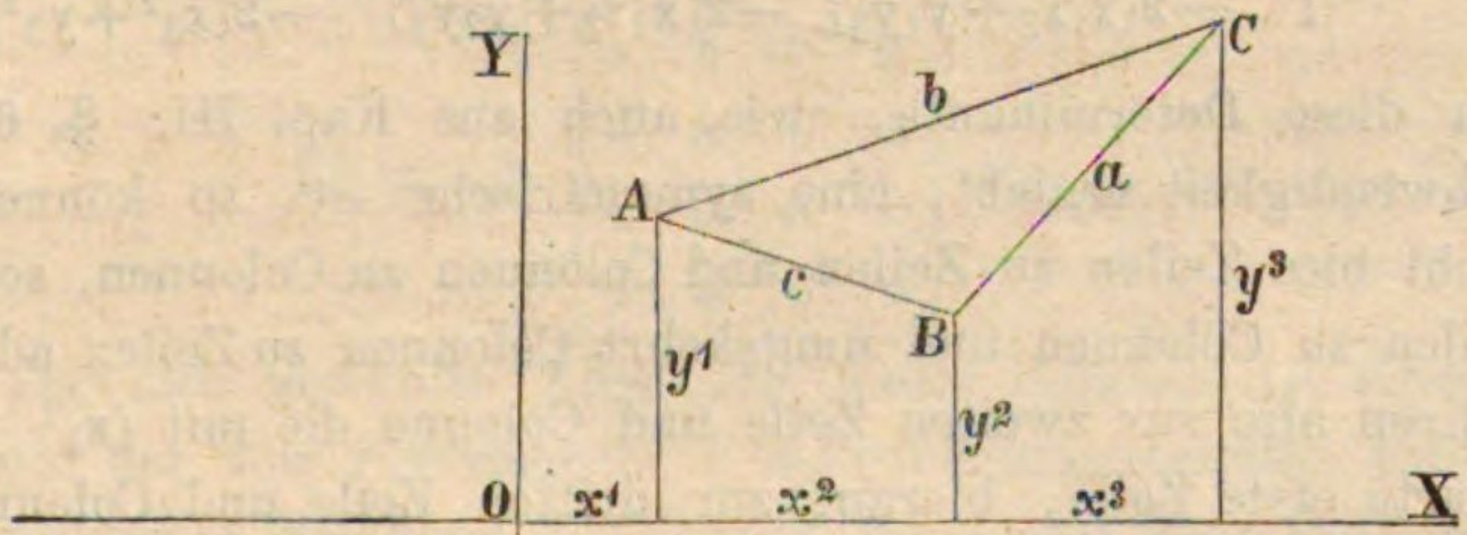
Bezeichnet F den Dreiecksinhalt, so ist der Figur zufolge

$$F = \text{Trp. AC} - \text{Trp. AB} - \text{Trp. BC},$$

also nach einem bekannten Satze der Elemententangeometrie

$$2F = (y_1 + y_3)\,(x_3 - x_1) - (y_1 + y_2)\,(x_2 - x_1) - (y_2 + y_2)\,(x_3 - x_2)$$
$$= y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1).$$

Dieses Aggregat lässt sich sofort als dreireihige Determinante schreiben; man hat



$$2F = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

und hiemit ist bereits der erste Zweck erreicht. Für schiefwinklige Coordinaten mit dem Axenwinkel α findet sich ebenso

$$2F = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \sin \alpha$$

Um auch die zweite Formel herzuleiten, erheben wir unsre Determinante nach Kap. II. §. 5 auf den vierten Grad und bilden das Produkt

$$-4F^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Die Ausführung der Multiplikation liefert

$$-4F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2 & x_1x_3+y_1y_3 \\ 1 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 & x_2x_3+y_2y_3 \\ 1 & x_1x_3+y_1y_3 & x_2x_3+y_2y_3 & x_3^2-y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Nunmehr multipliciren wir die drei letzten Colonnen mit (-2) und dividiren durch eben diese Zahl die erste Zeile; diess giebt

$$-16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2(x_1^2+y_1^2) & -2(x_1x_2+y_1y_2) & -2(x_1x_3+y_1y_3) \\ 1 & -2(x_1x_2+y_1y_2) & -2(x_2^2+y_2^2) & -2(x_2x_3+y_2y_3) \\ 1 & -2(x_1x_3+y_1y_3) & -2(x_2x_3+y_2y_3) & -2(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix}.$$

Da diese Determinante, wie auch aus Kap. III. §. 6 sich mit Nothwendigkeit ergiebt, eine symmetrische ist, so können wir dann nicht blos Zeilen zu Zeilen und Colonnen zu Colonnen, sondern auch Zeilen zu Colonnen und umgekehrt Colonnen zu Zeilen addiren. Wir addiren also zur zweiten Zeile und Colonne die mit $(x_1^2 + y_2^2)$ multiplicirte erste Zeile, hierauf zur dritten Zeile und Colonne die mit $(x_2^2 + y_2^2)$ multiplicirte erste Zeile und schliesslich zur vierten Zeile und Colonne die mit $(x_3^2 + y_3^2)$ multiplicirte erste Zeile; so folgt

$$-16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2] & -[(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2] \\ 1 & -[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2] & 0 & -[(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2] \\ 1 & -[(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2] & -[(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2] & 0 \end{vmatrix}.$$

Wie sich aus der Figur folgern lässt, ist

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = c^2,$$
$$(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2 = b^2,$$
$$(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 = a^2,$$

somit auch

$$-16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a^2 & -b^2 \\ 1 & -a^2 & 0 & -c^2 \\ 1 & -b^2 & -c^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplikation der vier Colonnen mit a b c findet man hieraus

$$-16F^2 = \frac{1}{a^4b^4c^4} \begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ abc & 0 & a^3bc & ab^3c \\ abc & a^3bc & 0 & abc^3 \\ abc & ab^3c & abc^3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Jetzt dividire man die zweite, dritte und vierte Colonne bezüglich mit ab, ac und bc; dann tritt der Faktor $a^4b^4c^4$ vor die Determinante, und man hat

$$-16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b & a \\ c & 0 & a & b \\ b & a & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Indem man zuletzt die vierte Colonne zur ersten macht und die zweite zur dritten, ergiebt sich als Schlussformel

$$F^2 = \tfrac{1}{16} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = \tfrac{1}{16} \triangle.$$

Die hier gewählte Ableitung dieser Relation ist einem Collegienhefte der von Professor H. Pfaff (Wintersemester 1869/70) an der Universität Erlangen gehaltenen Vorlesung über Determinantentheorie entnommen; eine andre ebenfalls sehr elegante hat kürzlich Ritsert [1]) gegeben.

§. 2. Im Anschluss daran möge noch gezeigt werden, wie nach Baltzer's [2]) Angabe Möbius die Struktur dieser Determinante als nothwendig dargethan hat. Er entnimmt der Lehre von den Determinanten einzig als Hülfssatz die Thatsache, dass $\triangle$ durch die vier Ausdrücke

$$a + b + c,\ a + b - c,\ a - b + c,\ -a + b + c$$

ohne Rest theilbar ist [3]). Um diess zu erkennen, braucht man nur folgende Operationen vorzunehmen. Man addirt zuerst zu Colonne 1 Colonne 2, 3 und 4, hierauf addirt man zu Colonne 1 Colonne 2 und zieht 3 und 4 ab, ferner addirt man zu Colonne 1 Colonne 3 und zieht 2 und 4 ab, und zuletzt addirt man zu Colonne 1 Colonne 4, während Colonne 2 und 3 subtrahirt werden. So erhält man nachstehende Identitäten:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ b+a+c & a & 0 & c \\ c+a+b & 0 & a & b \\ c+b+a & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b-c & b & c & 0 \\ b+a-c & a & 0 & c \\ -c-a-b & 0 & a & b \\ c-b-a & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b+c & b & c & 0 \\ b-a-c & a & 0 & c \\ c+a-b & 0 & a & b \\ -c+b-a & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b-c & b & c & 0 \\ b+c-a & a & 0 & c \\ c+b-a & 0 & a & b \\ a-c-b & c & b & a \end{vmatrix},$$

und von den vier letzten Determinanten sieht man sofort, dass die erste Colonne einer jeden, und damit auch die Determinante selbst, einen der genannten vier Ausdrücke als Theiler enthält.

Möbius' Raisonnement ist nun weiter folgendes. Die Dreiecksfläche F^2 muss die Quadrate der drei Seiten, a^2, b^2, c^2 als gleichberechtigte Ausdrücke in sich aufnehmen, sie muss also eine symmetrische Funktion derselben sein. Bildet man ein ähnliches Dreieck mit den Seiten a_1, b_1, c_1, so ist

$$a_1 = \varrho a,\ b_1 = \varrho b,\ c_1 = \varrho c;$$

die Funktion muss also auch homogen sein. Da schliesslich F den Werth Null annimmt, wenn die drei Punkte A, B, C in Einer Geraden liegen, wenn also einer der vier Fälle

$$a + b + c = 0,$$
$$a - b + c = 0,$$
$$a + b - c = 0,$$
$$a - b - c = 0$$

eintritt, so muss F zur Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}$$

ein von a, b, c unabhängiges Verhältniss haben, d. h. es ist

$$F^2 = \mu^2 \triangle.$$

Um μ zu bestimmen, beachte man, dass für das gleichseitige Dreieck

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & a & a & 0 \\ a & a & 0 & a \\ a & 0 & a & a \\ 0 & a & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ a & -a & 2a & a \\ -a & -a & 2a & a \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{vmatrix} = 2a^4$$

wird. Andrerseits ist

$$F = \frac{\sqrt{3a^2}}{2}.$$

Da der Faktor $\sqrt{3}$ ausschliesslich zum gleichseitigen Dreiecke gehört, so hat man

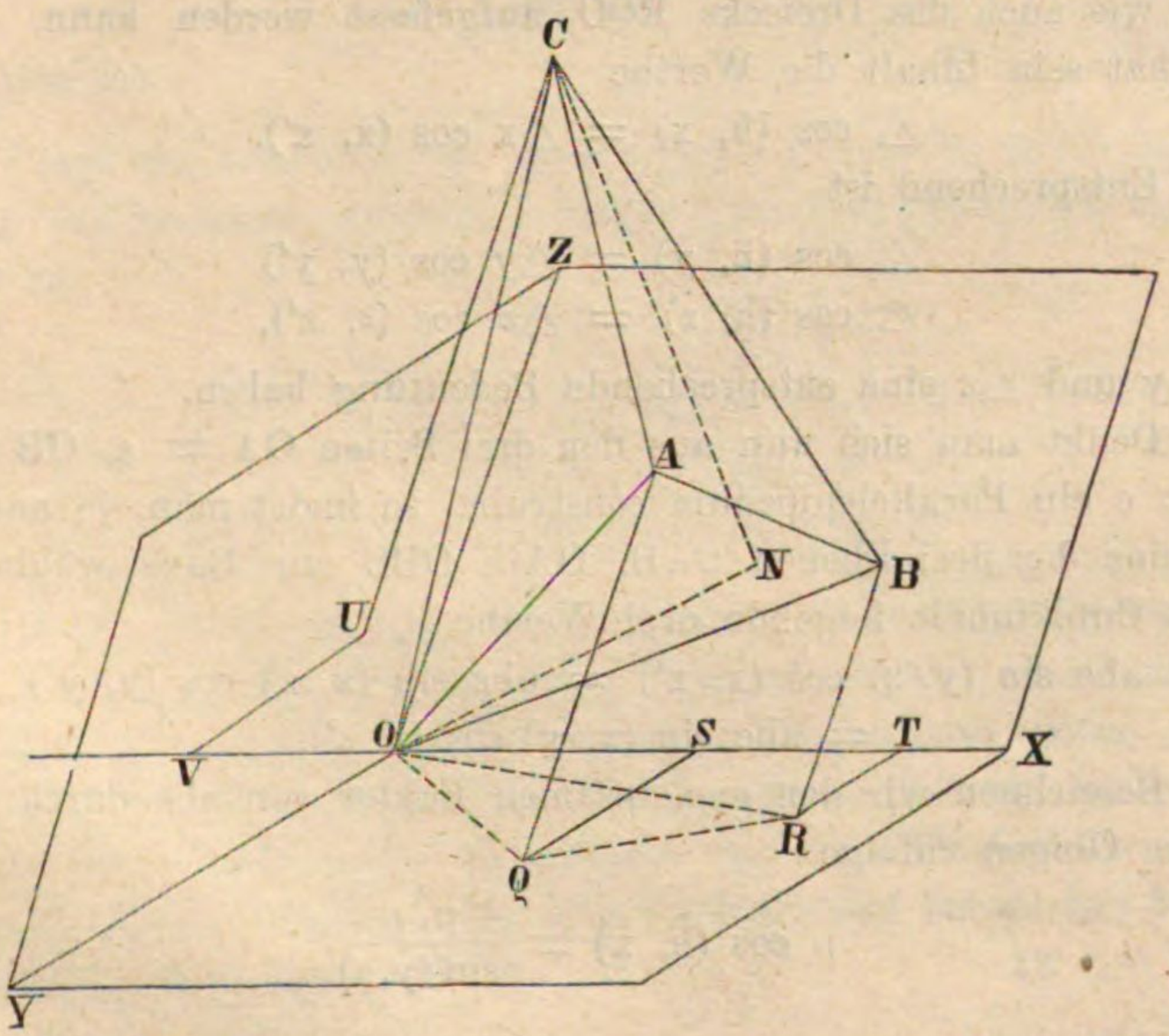
$$\mu = \frac{1}{4}, \quad \mu^2 = \frac{1}{16},$$

also

$$F^2 = \tfrac{1}{16} \triangle.$$

§. 3. Eine ähnliche Formel, wie wir sie in §. 1 für den Flächeninhalt eines durch die Coordinaten seiner Eckpunkte bestimmten Dreiecks fanden, lässt sich auch für den cubischen Inhalt eines Tetraëders angeben. Diese Formel ward bereits von Lagrange [4]), wenn auch freilich noch ohne die symbolische Bezeichnung der Determinanten, hergeleitet; in sehr einfacher Weise [5]) kann diese Herleitung nach folgender von Baltzer entwickelten Methode bewerkstelligt werden.

Es sei ABCO (s. Fig.) das gegebene Tetraëder; durch seinen



einen Eckpunkt O sei ein willkürliches schiefwinkliges Coordinatensystem X Y Z O gelegt; die drei Punkte A, B, C seien durch ihre Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 gegeben, so dass AQ $= z_1$, QS $= y_1$, SO $= x_1$, BR $= z_2$, RT $= y_2$, TO $= x_2$, CU $= z_3$, UV $= y_3$, VO $= x_3$ ist. Fällt man hierauf von C auf die Ebene OAB ein Loth CN $=$ h und bezeichnet den Tetraëderinhalt mit J, so ist zunächst

$$3J = h \,.\, \triangle \text{ OAB}.$$

Die fünf Geraden CU, UV, VO, OA, AC bilden nun ein geschlossnes windschiefes Polygon; dann ist zufolge eines Lehrsatzes, dessen Beweis etwa bei Duhamel [6]) nachgesehen werden mag,

$$h = x_3 \cos(h, x) + y_3 \cos(h, y) + z_3 \cos(h, z).$$

Unter (p, q) verstehen wir hier den Winkel, welchen zwei Gerade p und q mit einander einschliessen.

Zieht man die geraden Linien OR, RQ, QO und bezeichnet den Flächeninhalt des so entstandenen Dreiecks durch

$$\triangle x,$$

denkt sich ferner auf den drei Coordinatenebenen bezüglich die Lothe

$$x', y', z'$$

errichtet und legt senkrecht auf erste Gerade eine Ebene durch das über OQR errichtete schiefwinklige Prisma, so schneidet dieselbe das Prisma in einem Dreieck, welches sowohl als Projektion des Dreiecks ABO, wie auch des Dreiecks RQO aufgefasst werden kann. Demnach hat sein Inhalt die Werthe

$$\triangle \cos(h, x) = \triangle x \cos(x, x').$$

Entsprechend ist

$$\triangle \cos(h, y) = \triangle y \cos(y, y')$$
$$\triangle \cos(h, z) = \triangle z \cos(z, z'),$$

wo $\triangle y$ und $\triangle z$ eine entsprechende Bedeutung haben.

Denkt man sich nun aus den drei Seiten OA $=$ a, OB $=$ b, OC $=$ c ein Parallelepipedum construirt, so findet man, je nachdem man eine der drei Ebenen CAB, OAC, OBC zur Basis wählt, für dessen Cubikinhalt folgende drei Werthe

$$abc \sin(y, z) \cos(x, x') = abc \sin(x, z) \cos(y, y')$$
$$= abc \sin(x, y) \cos(z, z').$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Faktor von abc durch μ, so ist dem Obigen zufolge

$$p \cos(h, x) = \frac{p_x \mu}{\sin(y, z)},$$

oder da nach §. 1

$$\triangle x = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin (y, z)$$

ist,

$$2\triangle \cos (h, x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \mu.$$

Da $2\triangle \cos (h, y)$ und $2\triangle \cos (h, z)$ sich ebenso durch eine zweireihige Determinante ausdrücken lassen, so folgt durch Substitution aus dem eingangs hingestellten Lehrsatze

$$2h \triangle = \mu \left(x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Da aber $h \triangle = 3J$ ist, so folgt, indem man das erhaltene Aggregat zu einer Determinante vom dritten Grade zusammenfasst,

$$6J = \mu \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Die Grösse μ wurde von v. Staudt [7]) als Eckensinus in die Raumgeometrie eingeführt und durch das Symbol

$$\sin xyz$$

charakterisirt.

Liegt ein Eckpunkt der dreiseitigen Pyramide nicht im Ursprung des Systemes, sondern kommen ihm die Coordinaten x_0, y_0, z_0 zu, so ist

$$6J = \mu \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

§. 4. Da die geometrischen Beispiele dieses Kapitels natürlich keine umfassende Darstellung dieses Theiles der Determinantentheorie repräsentiren, sondern nur zur Illustrirung gewisser Fälle dienen sollen, wo jene Theorie eine besonders wichtige Rolle spielt, so möge noch an das Problem der Hauptaxen für eine Fläche der zweiten Ordnung erinnert werden. Da diess Problem nur bei solchen Flächen

eine Bedeutung hat, welche einen reellen Mittelpunkt besitzen, so kann ihre Gleichung sofort in der abgekürzten Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mxz + 2nxy + d = 0$$

zu Grunde gelegt werden.

Die Existenz der Hauptaxen hängt nun [8]) davon ab, dass die cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-k & n & m \\ n & b-k & l \\ m & l & c-k \end{vmatrix} = 0$$

drei reelle Wurzeln besitzt. Der Nachweis einer solchen Beschaffenheit der Wurzeln ist aber unverzüglich erbracht, sobald es gelingt, die Discriminante dieser Gleichung als eine Summe von vollständigen Quadraten darzustellen. Diess Problem haben Kummer [9]), Hesse [10]) und Henrici [11]) auf verschiedne Weisen gelöst; durch besondre Einfachheit zeichnet sich die im Folgenden wiedergegebene Lösung von Bauer [12]) aus.

Nach Kap. II. §. 16 erhält man, wenn man

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix}$$

setzt, aus der obigen Gleichung die nachstehende:

$$k^3 - S\triangle_{a,\,b} k^2 + S\triangle_a k - \triangle = 0,$$

wobei

$$\frac{d^2\triangle}{da\,db} = \triangle_{a,\,b},\quad \frac{d\triangle}{da} = \triangle_a$$

gesetzt worden ist. Nun ist nach Kap. V. §. 9 die Discriminante einer Gleichung das Produkt ihrer sämmtlichen Wurzeldifferenzen, wird dieselbe also hier gleich Null gesetzt, so ist diess die Bedingung für die Existenz zweier gleicher Wurzeln. Um die Discriminante zu bilden, hat man aus den beiden Gleichungen

$$3k^2 - 2S\triangle_{a,\,b} k + S\triangle_a = 0,$$
$$-S\triangle_{a,\,b} k^2 + 2S\triangle_a k - 3\triangle = 0,$$

deren erste das Differential der ursprünglichen Gleichung ist, die Grösse k zu eliminiren. Vermittelst des in Kap. V. §. 13 beschriebenen Cayley'schen Verfahrens findet sich, wenn man noch

$$\lambda_0 = 6S\triangle_a - 2(S\triangle_{ab})^2,$$
$$\lambda_1 = 9\triangle + S\triangle_{ab}\, S\triangle_a,$$
$$\lambda_2 = 6\triangle S\triangle_{a,b} - 2(S\triangle_a)^2$$

setzt, jene Resultante

$$R = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Zerlegt man die Determinante $\triangle$ nach den Elementen der drei Colonnen successive in Unterdeterminanten und summirt die Resultate, so folgt

$$3\triangle = a\triangle_a + b\triangle_b + c\triangle_c + 2(l\triangle_l + m\triangle_m + n\triangle_n)$$
$$= Sa\triangle_a + 2Sl\triangle_l$$

im Anschluss an die oben eingeführte abgekürzte Bezeichnungsweise. Durch direkte Ausrechnung kann man ferner zeigen, dass

$$\triangle \frac{d^2\triangle}{dadc} = \frac{d\triangle}{da} \cdot \frac{d\triangle}{dc} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{d\triangle}{dm}\right)^2$$

ist; setzt man statt des zweiten Differentialquotienten links die beiden andren, so resultiren die drei Gleichungen

$$\triangle\triangle_{ac} = \triangle_a \triangle_c - \triangle^2{}_m,\ \triangle\triangle_{a,b} = \triangle_a \triangle_b - \triangle^2{}_n,\ \triangle\triangle_{bc}$$
$$= \triangle_b \triangle_c - \triangle^2{}_l.$$

Diese drei Relationen zu einer einzigen zusammenfassend erhält man

$$\triangle S\triangle_{ab} = S(\triangle_a\triangle_b) - S\triangle^2{}_l.$$

Durch Substitution wird dann die Resultante

$$R = \begin{vmatrix} A - 6Sl^2 & B - 6Sl\triangle_l \\ A - 6l\triangle_b & C - 6S\triangle^2{}_l \end{vmatrix},$$

wobei

$$A = (Sa)^2 - 3Sa^2$$
$$B = SaS\triangle_a - 3Sa\triangle_a,$$
$$C = (S\triangle_a)^2 - 3S\triangle^2{}_a$$

gesetzt ist. Die Determinante R kann man nach Kap. II. §. 8 in eine Summe von $2^2 = 4$ Summanden zerlegen; es ist

$$R = 36 \begin{vmatrix} Sl^2 & Sl\triangle_l \\ Sl\triangle_l & S\triangle^2{}_l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} A & -Sl\triangle_l \\ B & -S\triangle^2{}_l \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -Sl^2 & B \\ -Sl\triangle_l & C \end{vmatrix}.$$
$$= 36\,\triangle^1 + \triangle^2 + 6\triangle^3 + 6\triangle^4.$$

Betrachten wir zunächst die beiden letzten Determinanten. Die Ausrechnung zeigt, dass

$$\triangle^3 + \triangle^4 = \overset{l, m, n}{S}(3S(a\triangle_l - l\triangle_a)^2 - (S(a\triangle_l - l\triangle_a))^2),$$

oder, wenn abkürzend

$$a\triangle_l - l\triangle_a = [a\triangle_l]$$

gesetzt wird,

$$\triangle^3 + \triangle^4 = \overset{l, m, n}{S}(2([a\triangle_l]^2 + [b\triangle_l]^2 + [c\triangle_l]^2 - [a\triangle_l]\ [b\triangle_l] - b\triangle_l]\ [c\triangle_l] - [c\triangle_l]\ [a\triangle_l]))$$

ist. Bezeichnet man den Klammerausdruck durch $\frac{1}{2}$ S, und versteht unter $\frac{1}{2}$ Sm und $\frac{1}{2}$ Sn analog das, was dieser Ausdruck durch Vertauschung von $\triangle_l$ mit $\triangle_m$ und $\triangle_n$ wird, so erhält man

$$\triangle^3 + \triangle^4 = 2(S_l + S_m + S_n).$$

Da S_l, S und S_n positive Grössen sind, so kann ihre Summe mannigfach als Summe von Quadraten dargestellt werden.

Gehen wir nun zu $\triangle^1$ und $\triangle^2$ zurück, so ist zunächst

$$\triangle^1 = (l\triangle_m - m\triangle_l)^2 + (m\triangle_n - n\triangle_m)^2 + (n\triangle^1 - l\triangle_n)^2$$

Um schliesslich auch $\triangle^2$ auf eine entsprechende Form zu bringen, betrachten wir die Determinante

$$\sqrt{M} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \triangle_a & \triangle_b & \triangle_c \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante, mit sich selbst nach der bekannten Regel multiplicirt, giebt

$$M = \begin{vmatrix} 3 & Sa & S\triangle_a \\ Sa & Sa^2 & Sa\triangle_a \\ S\triangle_a & Sa\triangle_a & S\triangle^2_a \end{vmatrix}.$$

Nun ist, wie der Augenschein lehrt,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dM}{dS\triangle^2_a} & \frac{dM}{dSa\triangle_a} \\ \frac{dM}{dSa\triangle_a} & \frac{dM}{dSa^2} \end{vmatrix},$$

und da diese letztre Determinante, wie sich aus einem früher bewiesnen Satze über die adjungirten Determinanten ergiebt, den Werth

$$3M$$

hat, so ist

$$\triangle^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 3M = \left[\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \triangle a & \triangle b & \triangle c \end{array}\right]\right]^2.$$

Hiemit ist das Problem vollständig gelöst.

§. 5. Den Schluss des Kapitels möge eine interessante Anwendung der Determinantenlehre auf die analytische Geometrie der Ebene bilden. Es soll bestimmt werden, ob die Durchschnittspunkte einer Geraden und eines durch 5 Punkte festgelegten Kegelschnittes reell oder imaginär seien. Wir nehmen homogene Punktcoordinaten an, so dass also die Coordinaten der gegebnen Punkte folgende sind:

$$\alpha_1, \beta_2, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;\ \alpha_4, \beta_4, \gamma_4;\ \alpha_5, \beta_5, \gamma_5.$$

Die Gleichungen von Kegelschnitt und Gerade seien:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 + 2gx_3x_1 + 2hx_1x_2 = 0,$$
$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Dann müssen folgende fünf lineare Gleichungen bestehen:

$$a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2 + 2f\beta_1\gamma_1 + 2g\gamma_1\alpha_1 + 2h\alpha_1\beta_1 = 0,$$
$$a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2 + 2f\beta_2\gamma_2 + 2g\gamma_2\alpha_2 + 2h\alpha_2\beta_2 = 0,$$
$$a\alpha_3^2 + b\beta_3^2 + c\gamma_3^2 + 2f\beta_3\gamma_3 + 2g\gamma_3\alpha_3 + 2h\alpha_3\beta_3 = 0,$$
$$a\alpha_4^2 + b\beta_4^2 + c\gamma_4^2 + 2f\beta_4\gamma_4 + 2g\gamma_4\alpha_4 + 2h\alpha_4\beta_4 = 0,$$
$$a\alpha_5^2 + b\beta_5^2 + c\gamma_5^2 + 2f\beta_5\gamma_5 + 2g\gamma_5\alpha_5 + 2h\alpha_5\beta_5 = 0.$$

Hiezu kommt noch die die Schnittpunkte von Curve und gerader Linie bestimmende Gleichung

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A \\ h & b & f & B \\ g & f & c & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Resultante dieser fünf linearen mit der einen quadratischen Gleichung ist nach Kap. V. §. 14 durch die Determinante

$$
\begin{vmatrix}
0 & C_1^2 & B_1^2 & -2B_1C_1 & 0 & 0 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2 \\
C_1^2 & 0 & A_1^2 & 0 & -2C_1A_1 & 0 & \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_4^2 & \beta_5^2 \\
B_1^2 & A_1^2 & 0 & 0 & 0 & -2A_1B_1 & \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 & \gamma_5^2 \\
-2B_1C_1 & 0 & 0 & -2A_1^2 & 2A_1B_1 & 2C_1A_1 & 2\beta_1\gamma_1 & 2\beta_2\gamma_2 & 2\beta_3\gamma_3 & 2\beta_4\gamma_4 & 2\beta_5\gamma_5 \\
0 & -2C_1A_1 & 0 & 2A_1B_1 & -2B_1^2 & 2B_1C_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\gamma_4\alpha_4 & 2\gamma_5\alpha_5 \\
0 & 0 & -2A_1B_1 & 2C_1A_1 & 2B_1C_1 & -2C_1^2 & 2\alpha_1\beta_1 & 2\alpha_2\beta_2 & 2\alpha_3\beta_3 & 2\alpha_4\beta_4 & 2\alpha_5\beta_5 \\
\alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\beta_1\gamma_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\beta_2\gamma_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\beta_3\gamma_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & 2\beta_4\gamma_4 & 2\gamma_4\alpha_4 & 2\alpha_4\beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_5^2 & \beta_5^2 & \gamma_5^2 & 2\beta_5\gamma_5 & 2\gamma_5\alpha_5 & 2\alpha_5\beta_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = M
$$

gegeben.

Ist $M = 0$, so ist jene Gerade eine Tangente des Kegelschnittes; ist M positiv, so sind die Durchschnittspunkte imaginär, im entgegengesetzten Falle dagegen reell [13]).

1) Ritsert, Herleitung der Determinante für den Dreiecksinhalt, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., 18. Band.

2) Baltzer, Historische Bemerkungen, Ber. d. Sächs. Gesellsch. Jahrg. 1865. S. 5.

3) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. S. 16.

4) Lagrange, Mém. de l'acad. de Berlin, année 1773. S. 149.

5) Baltzer, Ueber den Ausdruck des Tetraëders durch die Coordinaten der Eckpunkte, Ber. der Sächs. Gesellsch. Jahrg. 1870. S. 97.

6) Duhamel, Lehrbuch der reinen Mechanik, deutsch von Wagner, Braunschweig 1853. S. 1.

7) v. Staudt, Ueber die Inhalte der Polyëder und Polygone, Crelle's Journal f. d. reine und angew. Mathem.. 24. Band. S. 252.

8) Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, 1. Theil, deutsch von Fiedler, Leipzig 1863. S. 95.

9) Kummer, Bemerkungen über die cubische Gleichung, durch welche die Hauptaxen der Flächen zweiten Grades bestimmt werden, Crelle's Journal, 26. Band. S. 268.

10) Hesse, Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes, in eine Summe von Quadraten, ibid. 60. Band. S. 305.

11) Henrici, Bemerkung hiezu, ibid. 64. Band. S. 187.

12) Bauer, Von der Zerlegung der Discriminante der cubischen Gleichung, welche die Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung bestimmt, in eine Summe von Quadraten, ibid. 71. Band. S. 40.

13) Versluys, Applications des déterminants à l'algèbre et à la géometrie analytique, Grunert's Archiv d. Math. u. Phys. 53. Theil. S. 141.

Kapitel VIII.

Functionaldeterminanten.

§. 1. Es seien gegeben n homogene Gleichungen

$$f^1_{(x_1, x_2 \ldots x_n)} = 0 \ldots f^n_{(x_1, x_2 \ldots x_n)} = 0,$$

wir bilden aus denselben die n^2 partiellen Differentialquotienten, welche sie zulassen und stellen dieselben zu einer Determinante nten Grades

$$f_x = \begin{vmatrix} \frac{df^1}{dx_1} & \frac{df^2}{dx_1} & \frac{df^3}{dx_1} & \ldots & \frac{df^n}{dx_1} \\ \frac{df^1}{dx_2} & \frac{df^2}{dx_2} & \frac{df^3}{dx_2} & \ldots & \frac{df^n}{dx_2} \\ \frac{df^1}{dx_3} & \frac{df^2}{dx_3} & \frac{df^3}{dx_3} & \ldots & \frac{df^n}{dx_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{df^1}{dx_n} & \frac{df^2}{dx_n} & \frac{df^3}{dx_n} & \ldots & \frac{df^n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

zusammen, welche von Jacobi [i]) unter dem Namen der Functionaldeterminante in die Wissenschaft eingeführt wurde. Eine kürzere Bezeichnung für dieselbe ist folgende:

$$f_x = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \ldots f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} \ldots f_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} \ldots f_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sind die obigen n Gleichungen nicht vollkommen unabhängig, sondern hängen sie durch eine Gleichung

$$\varphi(f^1, f^2 \ldots f^n) = 0$$

zusammen, so liefert diese Gleichung, partiell nach allen darin auftretenden Veränderlichen differentiirt, folgende Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{df^1}\cdot\frac{df^1}{dx_1}+\frac{d\varphi}{df^2}\cdot\frac{df^2}{dx_1}+\ldots+\frac{d\varphi}{df^n}\cdot\frac{df^n}{dx_1}=0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{d\varphi}{df^1}\cdot\frac{df^1}{dx_n}+\frac{d\varphi}{df^2}\cdot\frac{df^2}{dx_n}+\ldots+\frac{d\varphi}{df^n}\cdot\frac{df^n}{dx_n}=0.$$

Diese Gleichungen sind ihrer Entstehung nach miteinander verträglich; es muss also die Determinante ihres Systemes nach Kap. V. §. 3 identisch verschwinden. Diess giebt den Satz [2]):

Sind die Functionen $f^1, f^2 \ldots f^n$ durch irgend eine Relation verbunden, so verschwindet die Functionaldeterminante des Systemes, und umgekehrt kann man aus dem Verschwinden dieser Determinante auf das Vorhandensein einer solchen Relation schliessen.

Die Converse kann auch analytisch leicht bewiesen werden, bedarf aber eines solchen Beweises nicht unbedingt, indem beim ersten Satze alle Criterien der Umkehrbarkeit [3]) erfüllt sind.

Es geht aus dem Vorhergehenden auch zugleich hervor, wie die Functionaldeterminante nicht blos in diesem speziellen, sondern auch im allgemeinen Falle als Eliminations-Resultat aufzufassen ist. Denn bestimmt man aus dem durch Differentiirung der obigen Gleichungen entstandenen Systeme

$$df^1 = f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2 + \ldots + f_{1n}dx_n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$df^n = f_{n1}dx_1 + f_{n2}dx_2 + \ldots + f_{nn}dx_n$$

etwa dx_k, so ist

$$d_k = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & \ldots & df^1 & \ldots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \ldots & df^n & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}}{fx}.$$

§. 2. Bisher waren die Functionen f einfach von n unabhängig veränderlichen Grössen abhängig; wir gehen nun einen Schritt weiter und setzen

$$f^1 = \varphi^1(y_1, y_2 \ldots y_n) \ldots f^n = \varphi^n(y_1, y_2 \ldots y_n),$$
$$y_1 = \psi^1(x_1, x_2 \ldots x_n) \ldots y_n = \psi^n(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Differentiirt man beide Systeme von Gleichungen, so erhält man 2n Differentialgleichungen:

$$df^1 = \frac{d\varphi^1}{dy_1}\,dy_1 + \frac{d\varphi^1}{dy_2}\,dy_2 + \ldots + \frac{d\varphi^1}{dy_n}\,dy_n,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$df^n = \frac{d\varphi^n}{dy_1}\,dy_1 + \frac{d\varphi^n}{dy_2}\,dy_2 + \ldots + \frac{d\varphi^n}{dy_n}\,dy_n;$$
$$dy_1 = \frac{d\psi^1}{dx_1}\,dx_1 + \frac{d\psi^1}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d\psi^1}{dx_n}\,dx_n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$dy_n = \frac{d\psi^n}{dx_1}\,dx_1 + \frac{d\psi^n}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d\psi^n}{dx_n}\,dx_n.$$

Setzt man in jeder Gleichung des ersten Systemes den aus dem zweiten sich ergebenden Werth von

$$dy_k$$

ein, so kann man die Multiplikationsregel der Determinanten in Anwendung bringen und findet [4])

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi^1}{dx_1} & \frac{d\psi^2}{dx_1} & \cdots & \frac{d\psi^n}{dx_1} \\ \frac{d\psi^1}{dx_2} & \frac{d\psi^2}{dx_2} & \cdots & \frac{d\psi^n}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi^1}{dx_n} & \frac{d\psi^2}{dx_n} & \cdots & \frac{d\psi^n}{dx_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{dy_1} & \frac{d\varphi^2}{dy_1} & \cdots & \frac{d\varphi^n}{dy_1} \\ \frac{d\varphi^1}{dy_2} & \frac{d\varphi^2}{dy_2} & \cdots & \frac{d\varphi^n}{dy_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi^1}{dy_n} & \frac{d\varphi^2}{dy_n} & \cdots & \frac{d\varphi^n}{dy_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_1} & \cdots & \frac{dy_n}{dx_1} \\ \frac{dy_1}{dx_2} & \frac{dy_2}{dx_2} & \cdots & \frac{dy_n}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \frac{dy_2}{dx_n} & \cdots & \frac{dy_n}{dx_n} \end{vmatrix}.$$

§. 3. Während im Vorstehenden y in x und f in y explicite ausgedrückt war, möge jetzt folgende Beziehung stattfinden. Es ist

$$\begin{matrix} \varphi^1 \\ \left(\begin{matrix} f^1 \\ [x_1 \ldots x_n] \end{matrix} \cdots \begin{matrix} f^n \\ [x_1 \ldots x_n] \end{matrix}\right) \\ = 0 \ldots \varphi^n \end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix} f^1 \\ [x_1 \ldots x_n] \end{matrix} \cdots \begin{matrix} f^n \\ [x_1 \ldots x_n] \end{matrix}\right) = 0,$$

und zwar sollen diese Gleichungen so beschaffen sein, dass auf der linken Seite die Veränderlichen mit den Funktionen x beliebig verbunden auftreten. Alsdann ergiebt die Ableitung dieser Gleichungen nach sämmtlichen f folgende Identitäten:

$$\frac{d\varphi_1}{df_1}\frac{df_1}{dx_1} + \frac{d\varphi_1}{df_2}\frac{df_2}{dx_1} + \ldots + \frac{d\varphi_1}{df_n}\frac{df_n}{dx_1} = -\frac{d\varphi_1}{dx_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d\varphi_n}{df_1}\frac{df_1}{dx_n} + \frac{d\varphi_n}{df_2}\frac{df_2}{dx_n} + \ldots + \frac{d\varphi_n}{df_n}\frac{df_n}{dx_n} = -\frac{d\varphi_n}{dx_n}.$$

Setzt man nun

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{df_1} & \frac{d\varphi_1}{df_2} \cdots \frac{d\varphi_1}{df_n} \\ \frac{d\varphi_2}{df_1} & \frac{d\varphi_2}{df_2} \cdots \frac{d\varphi_2}{df_n} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{df_1} & \frac{d\varphi_n}{df_2} \cdots \frac{d\varphi_n}{df_n} \end{vmatrix} = \varphi_f, \quad \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{d\varphi_1}{dx_2} \cdots \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1} & \frac{d\varphi_2}{dx_2} \cdots \frac{d\varphi_2}{dx_n} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} & \frac{d\varphi_n}{dx_2} \cdots \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix} = \varphi_x,$$

so hat man wiederum dem Multiplikationssatze zufolge

$$\varphi_f \,.\, f_x = (-1)^n \varphi_x \,.$$

Es steht ersichtlich nichts im Wege, umgekehrt die x als Funktionen der f zu betrachten; dann können wir die eben erhaltene Gleichung so schreiben:

$$\varphi_x \,.\, x_f = (-1)^n \varphi_f \,.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so folgt

$$f_x \,.\, x_f = (-1)^{2n} = 1.$$

Beispiel. Es sei

$$\varphi^1 = ax_1(x_1 + x_2) + cx_1x_2$$
$$\varphi^2 = bx_2{}^2(x_1 + x_2) - dx_1x_2.$$

Um die oben angewandte Bezeichnung festzuhalten, wäre also

$$f^1 = x_1 + x_2,$$
$$f^2 = x_1x_2,$$

und man hat also

$$\varphi_f \,.\, f_x = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{df^1} & \frac{d\varphi^1}{df^2} \\ \frac{d\varphi^2}{df^1} & \frac{d\varphi^2}{df^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{df^1}{dx_1} & \frac{df^1}{dx_2} \\ \frac{df^2}{dx_1} & \frac{df^2}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1 & c \\ bx_2{}^2 & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$
$$= -adx_1x_2 - bcx_2{}^3 + adx_1{}^2 + bcx_1x_2{}^2.$$

Der nämliche Werth ergiebt sich aber, wenn man

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{dx_1} & \frac{d\varphi^1}{dx_2} \\ \frac{d\varphi^2}{dx_1} & \frac{d\varphi^2}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2ax_1 + ax_2 + cx_2 & ax_1 + cx_1 \\ bx_2^2 - dx_2 & 2bx_1x_2 + 3bx_2^2 - dx_1 \end{vmatrix}$$

berechnet.

Drückt man dagegen vermittelst der obigen Gleichungen f^1 und f^2 durch x_1 und x_2 aus, so findet sich

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\,(f^1 + \sqrt{(f^1)^2 - 4f^2})$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}\,(f^1 - \sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}),$$

also

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{df^1} & \frac{dx_1}{df^2} \\ \frac{dx_2}{df^1} & \frac{dx_2}{df^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f^1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}}\right) & \frac{-1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}} \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{f^1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}} \end{vmatrix},$$

und diese letztre Determinante hat den Werth

$$\frac{1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}} = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{(-1)^2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix}},$$

in Uebereinstimmung mit dem oben gewonnenen Satze.

§. 4. Von besondrer Wichtigkeit erweist sich die Lehre von den Functionaldeterminanten bei gewissen Problemen der Integralrechnung, sowie der höheren Geometrie.

Es sei gegeben das n fache Integral

$$J = \int^n \Phi_{(x_1, x_2 \ldots x_n)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

und es werde gefordert, anstatt der Variabelen $x_1 \ldots x_n$ eine neue Serie $u_1 \ldots u_n$ einzuführen, welche mit den früheren durch n Gleichungen

$$x_1 = f^1_{(u_1, u_2 \ldots u_n)},$$
$$x_2 = f^2_{(u_1, u_2 \ldots u_n)},$$
$$\vdots$$
$$x_n = f^n_{(u_1, u_2 \ldots u_n)}$$

verknüpft sind. Die betreffende Transformationsformel ist von Jacobi [5]) und Catalan [6]) angegeben werden; wir folgen hier der Darstellung von Baehr [7]).

Man führt zunächst u_1 statt x_1 ein, eliminirt die $(n-1)$ Variablen $u_2, u_3 \ldots u_n$ und erhält

$$x_1 = F^1(u_1, x_2 \ldots x_n).$$

Ebenso ergiebt sich, indem man auch u_2 an die Stelle von x_2 treten lässt,

$$x_2 = F^2(u_1, u_2, x_2 \ldots x_n).$$

So wird das Integral schliesslich folgende Form annehmen:

$$J = S \int du_1 \int du_2 \ldots \int du_{n-1} \int \Phi(F^1 F^2 \ldots F^{n-1} f^n) \frac{dF^1}{du_1} \frac{dF^2}{du_2} \ldots \frac{dF^{n-1}}{du_{n-1}} \frac{df^n}{du_n} du_n.$$

Die Integrationsgrenzen bestimmen sich aus dem früheren durch die n Gleichungen

$$x_q = F^q.$$

Differentiirt man hierauf die Gleichung

$$x_p = f^p(u_1, u_2 \ldots u_n) = F^p(u_1, u_2 \ldots u_p\, x_{p+1}\, x_{p+2} \ldots x_n)$$

successive nach $x_{p+1}, x_{p+2} \ldots x_n$, so erhält man folgendes System von $(n - p + 1)$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_p}{du_p} &= \frac{dF^p}{du_p} + \frac{dF^p}{dx_{p+1}} \frac{dx_{p+1}}{du_p} + \ldots + \frac{dF^p}{dx_n} \frac{dx_n}{du_p}, \\
\frac{dx_p}{du_{p+1}} &= \frac{dF^p}{dx_{p+1}} \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} + \ldots + \frac{dF^p}{dx_n} \frac{dx_n}{du_{p+1}}, \\
&\vdots \\
\frac{dx_p}{du_n} &= \frac{dF^p}{dx_{p+1}} \frac{dx_{p+1}}{du_n} + \ldots + \frac{dF^p}{dx_n} \frac{dx_n}{du_n}.
\end{aligned}$$

Die Bedingung für das gemeinsame Bestehen dieser Gleichungen ist nach Kap. V. §. 3 folgende:

$$\begin{vmatrix}
\frac{dx_p}{du_p} - \frac{dF^p}{du_p} & \frac{dx_{p+1}}{du_p} & \frac{dx_{p+2}}{du_p} & \ldots & \frac{dx_n}{du_p} \\
\frac{dx_p}{du_{p+1}} & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+1}} & \ldots & \frac{dx_n}{du_{p+1}} \\
\frac{dx_p}{du_{p+2}} & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+2}} & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+2}} & \ldots & \frac{dx_n}{du_{p+2}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
\frac{dx_p}{du_n} & \frac{dx_{p+1}}{du_n} & \frac{dx_{p+2}}{du_n} & \ldots & \frac{dx_n}{du_n}
\end{vmatrix} = 0.$$

Zerlegt man diese Determinante nach Kap. II. §. 8 in eine Differenz, so resultirt

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_p}{du_p} & \frac{dx_{p+1}}{du_p} & \cdot\ \cdot & \frac{dx_n}{du_p} \\ \frac{dx_p}{du_{p+1}} & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} & \cdot\ \cdot & \frac{dx_n}{du_{p+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_p}{du_n} & \frac{dx_{p+1}}{du_n} & \cdot\ \cdot & \frac{dx_{p+1}}{du_n} \end{vmatrix} - \frac{dF_p}{du_p} \begin{vmatrix} \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+1}} & \cdots & \frac{dx_n}{du_{p+1}} \\ \frac{dx_{p+1}}{du_{p+2}} & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+2}} & \cdots & \frac{dx_n}{du_{p+2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_{p+1}}{du_n} & \frac{dx_{p+2}}{du_n} & \cdots & \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man, um die darin vorkommenden Elemente bestimmt unterscheiden zu können, die beiden hier vorkommenden Functionaldeterminanten bezüglich durch

$$D(x_p, x_{p+1} \ldots x_n),\ D(x_{p+1}, x_{p+2} \ldots x_n),$$

so ist der letzten Gleichung zufolge

$$\frac{dF^p}{du_p} = \frac{D(x_p, x_{p+1} \ldots x_n)}{D(x_{p+1}, x_{p+2} \ldots x_n)}.$$

Setzt man hier für p sämmtliche ganzzahlige Werthe zwischen 0 und (n — 1) ein, so erhält man durch deren Multiplikation; indem blos der erste Zähler und der letzte Nenner sich nicht fortheben,

$$\frac{dF^1}{du_1} \cdot \frac{dF^2}{du_2} \cdots \frac{dF^{n-1}}{du_{n-1}} = \frac{D(x_1, x_2 \ldots x_n)}{D(x_n)},$$

oder da

$$D(x_n) = \frac{df^n}{du_n} = \frac{dx_n}{du_n}$$

ist,

$$\frac{dF^1}{du_1} \cdot \frac{dF^2}{du_2} \cdots \frac{dF^{n-1}}{du_{n-1}} \frac{df^n}{du_n} = D(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Durch Substitution dieses Werthes für das in der obigen Integralformel vorkommende Produkt ergiebt sich zum Schluss:

$$J = \int^{(n)} \Phi_{(f^1x,\ f^2x \ldots f^n_x)} \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{du_1} & \frac{dx_1}{du_2} & \cdot\ \cdot & \frac{dx_1}{du_n} \\ \frac{dx_2}{du_1} & \frac{dx_2}{du_2} & \cdot\ \cdot & \frac{dx_2}{du_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_n}{du_1} & \frac{dx_n}{du_2} & \cdot\ \cdot & \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} du_n\, du_{n-1} \ldots du_2\, du_1.$$

Ganz analog gestaltet sich die Behandlung, wenn die x nicht explicite in den u ausgedrückt, sondern durch Gleichungen verknüpft sind.

Beispiel. In einer Kugel, bezogen auf ein durch den Mittelpunkt gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem, ändert sich die Dichtigkeit so, dass sie in concentrischen Schichten gleich bleibt; für jeden Punkt im Innern ist dieselbe proportional seiner Entfernung vom Mittelpunkt. Auf den drei Axen x, y, z nimmt man bezüglich drei feste Strecken a, b, c und construirt daraus ein Parallelepiped, dessen Masse bestimmt werden soll.

Ist M die Masse, ϱ ein Proportionalitätsfaktor, so hat man ersichtlich

$$M = \varrho \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx.$$

Zur Auswerthung dieses dreifachen Integrales wird man sich mit Vortheil polarer Coordinaten bedienen, und es sei unsre Aufgabe, dieselben einzuführen.

Zunächst ist, wenn

$$z = u_1 \sin u_2,$$
$$y = u_1 \cos u_2 \sin u_3,$$
$$x = u_1 \cos u_2 \cos u_3$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = u_1.$$

Ferner hat man

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du_1} & \frac{dx}{du_2} & \frac{dx}{du_3} \\ \frac{dy}{du_1} & \frac{dy}{du_2} & \frac{dy}{du_3} \\ \frac{dz}{du_1} & \frac{dz}{du_2} & \frac{dz}{du_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u_2 \cos u_3 & -u_1 \sin u_2 \cos u_3 & -u_1 \cos u_2 \sin u_3 \\ \cos u_2 \sin u_3 & -u_1 \sin u_2 \sin u_3 & u_1 \cos u_2 \cos u_3 \\ \sin u_2 & u_1 \cos u_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese letztre Determinante lässt sich auf eine sehr einfache Form bringen. Wir setzen u_1^2 und $\cos u_2$ als Faktoren vor die Determinante, multipliciren hierauf die erste Colonne mit $\cos u_2$, die zweite mit $\sin u_2$ und subtrahiren letztre von erstrer; dann ist

$$\frac{u_1^2 \cos u_2}{\sin u_2 \cos u_2} \begin{vmatrix} \cos^2 u_2 \cos u_3 & -\cos u_2 & -\sin u_3 \\ \cos^2 u_2 \sin u_3 & -\sin u_3 & \cos u_3 \\ \sin u_2 \cos u_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

und diese geht nach Kap. II. §. 5 sofort in

$$u_1^2 \cos u_2 \,(-\cos^2 u_3 - \sin^2 u_3) = -\, u_1^2 \cos u_2$$

über. Es ist demnach unser obiges Integral jetzt folgendes geworden:

$$M = \varrho \int_0^a \int_0^{\varphi u_1} \int_0^{\chi u_1,\, u_2} (-u_1^3 \cos u_2)\, du_3\, du_2\, du_1.$$

Die Functionen φ und χ sind den Transformationsgleichungen zu entnehmen.

Ein vollständig durchgerechnetes Beispiel für solche Transformationen hat ganz neuerlich Hoppe gegeben [8]).

§. 5. Eine wichtige Rolle spielen die Functionaldeterminanten in der Lehre von der Flächenkrümmung. Soll die Krümmung einer ebenen Curve bestimmt werden, so vergleicht man bekanntlich das Curvenstück in der Nähe des betreffenden Punktes mit dem zu demselben gehörigen Krümmungskreise. Da es eine Krümmungskugel für eine Fläche in diesem Sinne nicht giebt, so hat Gauss [9]) folgendes Auskunftsmittel ersonnen.

Um den Ursprung des (rechtwinklig vorausgesetzten) Coordinatensystemes construirt man mit der Längeneinheit als Radius eine Kugel. Soll im Punkte x, y, z die Krümmung der Fläche untersucht werden, so denke man sich diesen Punkt als Eckpunkt eines unendlich kleinen Dreiecks $\triangle$ der Fläche, dessen beide andre Ecken durch die Coordinaten

$$x + dx,\ y + dy,\ z + dz;\ x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z$$

bestimmt sein mögen. Ferner ziehe man durch den Anfangspunkt eine Gerade parallel zu der im Punkte x, y, z auf der Fläche errichteten Normale; dieselbe schneidet die Einheitskugel in einem Punkte ξ, η, ζ, der mit den beiden Punkten

$$\xi + d\xi,\ \eta + d\eta,\ \zeta + d\zeta;\ \xi + \delta\xi,\ \eta + \delta\eta,\ \zeta + \delta\zeta$$

ein unendlich kleines sphärisches Dreieck $\triangle'$ bestimmt. Den Bruch

$$k = \frac{\triangle'}{\triangle}$$

bezeichnet nun Gauss (s. o.) als Krümmungsmass der Fläche im Punkte x, y, z; um denselben analytisch auszudrücken, hat Baltzer [10]) das im Folgenden geschilderte elegante Verfahren angegeben.

Projicirt man die beiden Dreiecke $\triangle$ und $\triangle'$ orthogonal auf die xy Ebene und bezeichnet mit φ und φ' die Winkel, welche die in den Punkten x, y, z und ξ, η, ζ bezüglich an Fläche und Kugel gelegten Berührungsebenen mit jener Ebene bilden, so ist nach

einem bekannten Satze, unter $\triangle_1$ und $\triangle'_1$ die Flächeninhalte der Projektionen verstanden,

$$\triangle' = \triangle'_1 \cos \varphi',$$
$$\triangle = \triangle_1 \cos \varphi.$$

Nun sind aber, der Construktion gemäss, die Winkel φ und φ' einander gleich; es ist somit das Krümmungsmass

$$k = \frac{\triangle'_1}{\triangle_1}.$$

Nach Kap. VII. §. 1 hat man

$$\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix} = \triangle_1 , \quad \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} d\xi & \delta\xi \\ d\eta & \delta\eta \end{vmatrix} = \triangle'_1,$$

so dass k den Werth

$$\frac{\begin{vmatrix} d\xi & \delta\xi \\ d\eta & \delta\eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix}}$$

annimmt. Da ferner ξ und η Funktionen von x und y sind, so ist

$$d\xi = \frac{d\xi}{dx} dx + \frac{d\xi}{dy} dy$$
$$d\eta = \frac{d\eta}{dx} dx + \frac{d\eta}{dy} dy.$$

Bringt man jetzt §. 2 zur Anwendung, so fliesst hieraus die Relation

$$\begin{vmatrix} d\xi & \delta\xi \\ d\eta & \delta\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\eta}{dy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix},$$

so dass mithin k als die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\eta}{dy} \end{vmatrix}$$

gefunden ist.

Setzt man nach Euler's Vorgang, wenn $z = f_{(x, y)}$ die Gleichung der Fläche ist,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

so lässt sich leicht zeigen, dass

$$\xi = \frac{p}{p^2+q^2+1}, \quad \eta = \frac{q}{p^2+q^2+1}, \quad \zeta = \frac{1}{p^2+q^2+1}$$

sei. Nach §. 3 kann man

$$\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\eta}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dp} & \frac{d\xi}{dq} \\ \frac{d\eta}{dp} & \frac{d\eta}{dq} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dx} & \frac{dp}{dy} \\ \frac{dq}{dx} & \frac{dq}{dy} \end{vmatrix}$$

setzen. Die zweite Determinante rechts des Gleichheitszeichens ist gleich

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z}{dxdy}\,\frac{d^2z}{dydx} = rt - s^2,$$

so dass k auch durch den Bruch

$$\frac{rt - s^2}{(p^2+q^2+1)^2}$$

ausgedrückt wird [11]).

Die partielle Differentialgleichung aller in eine Ebene ausbreitbaren Flächen ist bekanntlich [12])

$$rt - s^2 = 0;$$

es ergiebt sich also aus dem Gesagten, dass den abwickelbaren Flächen sämmtlich das Krümmungsmass Null zukommt.

§. 6. Bekanntlich betrachtet es die neuere Mathematik als eine ihrer Hauptaufgaben, geometrische Probleme zu verallgemeinern oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, auf eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen auszudehnen. Es soll nun untersucht werden, wie der in §. 5 aufgestellte Begriff des Krümmungsmasses sich für eine solche Mannigfaltigkeit, die man wohl auch als Riemann'schen Raum [13]) bezeichnet, analytisch fixiren lässt. Wir folgen hiebei der die Hauptpunkte der Frage übersichtlich zusammenstellenden Untersuchungen von Beez [14]).

Die n fache Mannigfaltigkeit ist gegeben durch die Gleichung

$$F_{(x_0,\ x_1\ \ldots\ x_n)} = 0.$$

Wir bezeichnen die einzelnen Argumente $x_0, x_1 \ldots x_n$ im erweiterten Sinne als Punktcoordinaten, so dass ein Punkt

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0 \ldots x_n = 0$$

als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Axensystemes aufzufassen wäre. Alsdann ist eine mit diesem Punkte concentrische Einheitskugel (kugelförmige Mannigfaltigkeit vom n ten Grade) durch die Gleichung

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$$

gegeben; zwei Punkte der beiden Mannigfaltigkeiten sollen dann correspondirend genannt werden, wenn zwischen den Coordinaten $\xi_0 \ldots \xi_n$ und $x_0 \ldots x_n$ die Relationen

$$\xi_k = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2}} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n)$$

stattfinden.

Auf F werden angenommen $(n + 1)$ unendlich nahe gelegene Punkte $A, A_1 \ldots A_n$, deren Coordinaten bezüglich

$$\begin{array}{c} x_0,\ x_1 \ldots x_n \\ x_0 + d^1x_0,\ x_1 + d^1x_1 \ldots x_n + d^1x_n \\ \vdots \\ x_0 + d^nx_0,\ x_1 + d^nx_1 \ldots x_n + d^nx_n \end{array}$$

sind; die correspondirenden Punkte auf der n fach ausgedehnten Kugel seien $A', A'_1 \ldots A'_n$, und ihre Coordinaten mögen dadurch bezüglich aus den eben angeschriebenen hervorgehen, dass man ξ für x einsetzt. Denken wir uns durch jede Gesammtheit von Punkten ein $(n + 1)$ fach ausgedehntes Gebilde bestimmt, welches dem Parallelepipedum des gewöhnlichen Raumes entspricht, so können wir deren Volumina bestimmen; gehört R zur Mannigfaltigkeit F, R′ zur Kugel, so ist

$$R = \begin{vmatrix} x_0 & d^1x_0 & d^2x_0 & \ldots & d^nx_0 \\ x_1 & d^1x_1 & d^2x_1 & \ldots & d^nx_1 \\ x_2 & d^1x_2 & d^2x_2 & \ldots & d^nx_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & d^1x_n & d^2x_n & \ldots & d^nx_n \end{vmatrix}, \quad R' = \begin{vmatrix} \xi_0 & d^1\xi_0 & d^2\xi_0 & \ldots & d^n\xi_0 \\ \xi_1 & d^1\xi_1 & d^2\xi_1 & \ldots & d_n\xi_1 \\ \xi_2 & d^1\xi_2 & d^2\xi_2 & \ldots & d^n\xi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n & d^1\xi_n & d^2\xi_n & \ldots & d^n\xi_n \end{vmatrix}.$$

Setzt man ferner

$$(d\omega)^2 = \left(\frac{dR}{dx_0}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dx_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dR}{dx_n}\right)^2,$$

$$(d\omega')^2 = \left(\frac{dR'}{d\xi_0}\right)^2 + \left(\frac{dR'}{d\xi_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dR'}{d\xi_n}\right)^2,$$

so ist zunächst

$$\frac{dR}{dx_0} : \frac{dR}{dx_1} : \ldots \frac{dR}{dx_n} = F_0 : F_1 : \ldots F_n,$$

unter F_k die Ableitung von F nach x_k verstanden, und ferner

$$\frac{\left(\frac{dR}{dx_k}\right)}{d\omega'} = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2}}.$$

gesetzt.

Ebenso geht aus dem Obigen hervor, dass

$$\frac{\left(\frac{dR'}{d\xi_k}\right)}{d\omega'} = \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}} = \xi_k$$

ist. Versteht man nun unter dem verallgemeinerten Krümmungsmasse K einer Fläche von n Dimensionen den Bruch

$$\frac{d\omega'}{d\omega},$$

so ist den letzten Herleitungen entsprechend

$$K = \frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{\frac{dR'}{d\xi_0}}{\frac{dR}{dx_0}} = \frac{\frac{dR'}{d\xi_1}}{\frac{dR}{dx_1}} = \ldots = \frac{\frac{dR'}{d\xi_n}}{\frac{dR}{dx_n}}.$$

Sei nun die Gleichung der Mannigfaltigkeit gegeben in der Form

$$x_0 = f_{(x_1,\ x_2 \ldots x_n)}.$$

Setzt man $\frac{df}{dx_k} = f_k$, und

$$s^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2,$$

so wird jetzt

$$\xi_0 = \frac{1}{s},\ \xi_k = -\frac{f_k}{s}\ (k = 1, 2 \ldots n).$$

Die Coordinaten ξ sind von x_0 unabhängig, so dass allgemein

$$d^i\xi_k = \xi_{k1}d^ix_1 + \xi_{k2}d^ix_2 + \ldots + \xi_{kn}d^ix_n$$

gesetzt werden darf. Es ist nun

$$\frac{dR}{dx_0} = \begin{vmatrix} d^1x_1 & d^2x_1 \ldots d^nx_1 \\ d^1x_2 & d^2x_2 \ldots d^nx_2 \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ d^1x_n & d^2x_n \ldots d^nx_n \end{vmatrix},\quad \frac{dR'}{d\xi_0} = \begin{vmatrix} d^1\xi_1 & d^2\xi_1 \ldots d^n\xi_1 \\ d^1\xi_2 & d^2\xi_2 \ldots d^n\xi_2 \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ d^1\xi_n & d^2\xi_n \ldots d^n\xi_n \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplikation folgt hieraus, indem man die so eben für $d_i\xi_k$ entwickelte Formel und das Multiplikationstheorem in Rechnung zieht,

$$K = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \ldots & \xi_{2n} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \ldots & \xi_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \xi_{n3} \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\xi_{ip} = \frac{d\xi_i}{dx_p},$$

oder da ξ_i, wie wir sahen, den Werth $-\frac{f_i}{s}$ hat, auch gleich

$$\frac{1}{s^3}\left(f_i \sum_{k=1}^{k=n}(f_k f_{kp} - s^2 f_{ip})\right),$$

indem wir $\frac{d^2 f}{dx_k\, dx_p} = f_{kp}$ setzten. Hiedurch zerlegt sich die Determinante K wieder in ein Produkt, nämlich das folgende:

$$K = \frac{1}{s^{3n}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & . & . & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & . & . & f_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ f_{1n} & f_{2n} & . & . & f_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^2 - s^2 & f_2 f_1 & . & . & f_n f_1 \\ f_1 f_2 & f_2^2 - s^2 & . & . & f_n f_2 \\ . & . & . & . & . \\ f_1 f_n & f_2 f_n & . & . & f^2_n - s^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{s^{3n}} \triangle\triangle'.$$

Entwickelt man die zweite Determinante $\triangle'$ in eine Reihe, so verschwinden alle Glieder mit Ausnahme der nachstehenden:

$$(-1)^{n-1} s^{2n-2}\left(\frac{d^{n-1}\triangle}{df^2_2 \ldots df^2_n} + \frac{d^{n-1}\triangle}{df_1^2 \ldots df^2_n} + \ldots\right)$$
$$+ (-1)s^{2n} = (-1)^n s^{2n-2}\,(s^2 - f_1^2 - \ldots - f^2_n).$$

Der letzte Klammerausdruck hat den Werth 1; es ist also, diess oben eingesetzt

$$K = \frac{(-1)^n s^{2n-2}}{s^{3n}} \triangle = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & . & . & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & . & . & f_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ f_{n1} & f_{n2} & . & . & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ist die Flächenmannigfaltigkeit gegeben durch eine Gleichung

$$F_{(x_0,\, x_1 \ldots x_n)},$$

so dass also nicht, wie bisher, eine Coordinate durch die andere explicite bestimmt ist, und setzt man

$$\frac{dF}{dx_k} = F_k, \quad \frac{d^2F}{dx_i\, dx_k} = F_{ik},$$

so ist nach Kronecker [15])

$$K = -\frac{1}{S^{n+2}} \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{10} & \ldots & F_{n0} \\ F_1 & F_{01} & F_{11} & \ldots & F_{n1} \\ . & . & . & . & . \\ F_n & F_{0n} & F_{1n} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} \quad (S^2 = F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F^2_n).$$

Dies drückt man (Kap. II. §. 5) gewöhnlich so aus: Die symmetrische Determinante der zweiten Differentialquotienten ist mit den ersten Differentialquotienten geändert.

§. 7. Wir sind durch die letzten Betrachtungen auf symmetrische Functionaldeterminanten geführt worden; wir wollen uns deren Untersuchung jetzt eingehender zuwenden. Setzen wir, wie oben

$$f_{ik} = \frac{df}{dx_i\, dx_k},$$

so ist bekanntlich

$$f_{ik} = f_{ki},$$

d. h. Die Functionaldeterminante wird symmetrisch (Kap. III. §. 6).

Wir bezeichnen jede solche Determinante als Hesse'sche Determinante, unter welchem Namen (the Hessian) sich besonders Sylvester [16]) mit ihr beschäftigt hat. Dieselbe ist einerseits die Determinante der zweiten Differentialquotienten, andrerseits die Functionaldeterminante der ersten Differentialquotienten.

Von dieser neuen Form lässt sich zunächst folgende wichtige Eigenschaft angeben:

Transformirt man die gegebene Function

$$f_{(x_1, x_2 \ldots x_n)}$$

dadurch, dass man die linearen Transformationen

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

vornimmt, so wird wenn $H(f_x)$ die Hesse'sche Determinante der ursprünglichen Form bezeichnet,

$$H(f_y) = H(f_x) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}^2.$$

Wir wollen die letztre Determinante mit $\triangle$ bezeichnen. Nun ist nach Grundsätzen der Differentialrechnung

$$\frac{d^2f}{dy_i dy_k} = \frac{d^2f}{dy_i dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_k} + \frac{d^2f}{dy_i dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dy_k} + \ldots + \frac{d^2f}{dy_i dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dy_k}.$$

Die Transformationsgleichungen liefern die Relationen

$$\frac{dx_l}{dy_m} = \frac{d\triangle}{da_{lm}};$$

dies oben eingesetzt

$$\frac{d^2f}{dy_i dy_k} = \frac{d^2f}{dy_i dx_1} \cdot \frac{d\triangle}{da_{1k}} + \frac{d^2f}{dy_i dx_2} \cdot \frac{d\triangle}{da_{2k}} + \ldots + \frac{d^2f}{dy_i dx_n} \cdot \frac{d\triangle}{da_{nk}}.$$

Nach dem Multiplikationssatze folgt hieraus

$$1)\quad H(f_y) = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dy_1 dx_1} & \frac{d^2f}{dy_1 dx_2} & \frac{d^2f}{dy_1 dx_3} & \cdots & \frac{d^2f}{dy_1 dx_n} \\ \frac{d^2f}{dy_2 dx_1} & \frac{d^2f}{dy_2 dx_2} & \frac{d^2f}{dy_2 dx_3} & \cdots & \frac{d^2f}{dy_2 dx_n} \\ \frac{d^2f}{dy_3 dx_1} & \frac{d^2f}{dy_3 dx_2} & \frac{d^2f}{dy_3 dx_3} & \cdots & \frac{d^2f}{dy_3 dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^2f}{dy_n dx_1} & \frac{d^2f}{dy_n dx_2} & \frac{d^2f}{dy_n dx_3} & \cdots & \frac{d^2f}{dy_n dx_n} \end{vmatrix} \cdot \triangle = \triangle' \triangle.$$

Es gilt aber auch die Gleichung

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{df}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_i} + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dy_i} + \ldots + \frac{df}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dy_i}$$

oder mit Rücksicht auf die für $\frac{dx_l}{dy_m}$ oben gefundne Relation,

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{df}{dx_l} \cdot \frac{d\triangle}{da_{1i}} + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{d\triangle}{da_{2i}} + \ldots + \frac{df}{dx_n} \cdot \frac{d\triangle}{da_{ni}}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nochmals partiell nach x_k, so ergiebt sich

$$\frac{d^2f}{dy_i dy_k} = \frac{d^2f}{dx_1 dx_k} \cdot \frac{d\triangle}{da_{1i}} + \frac{d^2f}{dx_2 dx_k} \cdot \frac{d\triangle}{da_{2i}} + \ldots + \frac{d^2f}{dx_n dx_k} \cdot \frac{d\triangle}{da_{ni}}.$$

Stellt man also auch jetzt alle zweiten Differentialquotienten zu einer Determinante zusammen und bedient sich des Multiplikationssatzes, so erhält man

$$2)\quad \triangle' = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} & \cdot & \cdot & \frac{d^2f}{dx_1 dx_n} \\ \frac{d^2f}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} & \cdot & \cdot & \frac{d^2f}{dx_2 dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^2f}{dx_n dx_1} & \frac{d^2f}{dx_n dx_2} & \cdot & \cdot & \frac{d^2f}{dx_n^2} \end{vmatrix} \cdot \triangle = H(f_x) \cdot \triangle.$$

Die Multiplikation der Gleichungen 1) und 2) führt schliesslich zu dem in der Behauptung aufgestellten Satze [17]):

$$H(f_y) = H(f_x) \cdot \triangle^2.$$

§. 8. Von besondrem Interesse wird die Discussion der Hesse'schen Determinante dann, wenn die Function f eine homogene ist. Behalten wir die bisherige Bezeichnungsweise bei und nehmen an, die Function sei vom mten Grade, so lehrt uns der berühmte von Euler [18]) gefundene Lehrsatz, dass

$$mf = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_n x_n$$

ist. Setzen wir für f nacheinander die Werthe f_1, f_2 . . . f_n ein, so gelangen wir zu folgendem Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(m-1)f_1 &= f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1n}x_n, \\
(m-1)f_2 &= f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2n}x_n, \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
(m-1)f_n &= f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots + f_{nn}x_n.
\end{aligned}$$

Die Determinante dieses Systemes ist identisch mit der Hesse'schen Determinante der Function f.

Nehmen wir zu diesem Systeme noch die erste Euler'sche Gleichung hinzu, und bringen alles auf Null, so restirt uns ein System von (n + 1) homogenen Gleichungen; damit dasselbe ein richtiges sei, muss nach Kap. V. §. 3

$$R = \begin{vmatrix} mf & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ (m-1)f_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ (m-1)f_2 & f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)f_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}f & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Durch Zerlegung dieser letzten Determinante erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}f & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ 0 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ 0 & f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\frac{m}{m-1} fH - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f_i f_k \frac{dH}{df_{ik}} = 0,$$

wenn H abgekürzt für $H(f_x)$ gesetzt wird.

Bildet man zur Determinante R (gleich Null) nach Kap. III. §. 3 die adjungirte Determinante, so ist dieselbe $= R^{m-1}$, also ebenfalls gleich Null. Dieselbe sei ϱ; ist dann

$$\frac{dR}{df_{ik}} = F_{ik}, \quad \frac{dR}{df_q} = F_q,$$

so besteht die Gleichung

$$\varrho = \begin{vmatrix} H & F_1 & F_2 & . & . & . & F_n \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & . & . & . & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & . & . & . & F_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & . & . & . & F_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die einer symmetrischen Determinante adjungirte Determinante diesen Charakter der Symmetrie beibehalten muss, so ist

$$F_{ik} = F_{ki}.$$

Nach Kap. V. §. 3 verhalten sich bei einem Systeme homogener Gleichungen die Unbekannten, wie die ersten Unterdeterminanten der Determinante des Systemes.

Man hat also:

$$-(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots x_n = \frac{dR}{df_i} : \frac{dR}{df_{i1}} : \frac{dR}{df_{i2}} : \ldots \frac{dR}{df_{in}},$$

und mit Rücksicht auf unsre Bezeichnungsweise

$$-(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots : x_n = H : F_1 : F_2 : \ldots : F_n.$$

So ist denn also

$$F_i = -\frac{x_i}{m-1} H, \quad F_{ik} = \frac{x_i x_k}{(m-1)^2} H.$$

Die letzte Gleichung erlangt besondre Bedeutung durch den glücklichen Gebrauch, welchen, wie wir nun sehen werden, Hesse [19]) davon in der Lehre von den algebraischen Curven und Oberflächen gemacht hat.

§. 9. Es sei nämlich

$$f_{(x, y)} = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Curve in rechtwinkligen Coordinaten; ihr Krümmungsmass, welches in diesem Falle mit dem reciproken Werthe des Krümmungshalbmessers r identisch ist, hat nach Kronecker's Formel (s. §. 6) den Werth

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{(m-1)^2 (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix},$$

oder mit Rücksicht auf die Schlussresultate in §. 8.

$$\frac{1}{r} = \frac{H}{(m-1)^2}.$$

Um von der homogenen auf die Cartes'sche Form überzugeken, hat man nur nach vollzogner Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen.

Nehmen wir nun an, es sei die Krümmung in einem Wende- (Inflexions-) Punkt zu untersuchen. In einem solchen Falle hat bekanntlich die Tangente nicht mehr zwei, sondern drei Nachbarpunkte mit der Curve gemein; der Krümmungskreis degenerirt in eine Gerade, und es wird $r = \infty$. Nun ist jedes Element der Hesse'schen Determinante homogen vom Grade $(m - 2)$; der ganzen Determinante kommt daher der Grad $3(m - 2)$ zu, und wir erhalten folgendes wichtige Resultat:

Die sämmtlichen Wendepunkte einer Curve vom mten Grade liegen auf einer Curve vom $(3(m-2))$ten Grade, der sogenannten Inflexionscurve, deren Gleichung man findet, indem man die Hesse'sche Determinante der ursprünglichen Curve gleich Null setzt. Die Anzahl der vorhandenen Wendepunkte ist

$$3m(m - 2).$$

Anlässlich dieser ihrer geometrischen Bedeutung bezeichnet man die Hesse'sche Determinante wohl auch als Inflexionsdeterminante.

Beispiel. Die gegebne Curve sei folgende:

$$x^3 - 3ax^2 + c^2y = 0;$$

wir setzen $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ und erhalten in homogenen Coordinaten

$$x_1^3 - 3ax_1^2x_3 + c^2x_2x_3^2 = 0.$$

Die Inflexionsdeterminante ist:

$$\begin{vmatrix} 6(x_1 - ax_3) & 0 & -6ax_1 \\ 0 & 0 & 4c^2x_3 \\ -6ax_1 & 4c^2x_3 & 4c^2x_2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man dieselbe gleich Null und nimmt wiederum $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, so ergiebt sich nachstehende Gleichung der Inflexionscurve:

$$96c^4(x - a) = 0.$$

Die Wendepunkte liegen sonach auf einer der Ordinatenaxe parallelen geraden Linie.

Diess Resultat lässt sich dahin erweitern, dass allgemein die drei reellen Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung ein und derselben Geraden angehören [20]).

Das obige instruktive Beispiel ist von Bammert [21]) gegeben worden.

§. 10. Gehen wir nun zu den Flächen über, so finden wir mit Rücksicht auf die beiden Fundamentalformeln in §. 6 ebenso, dass bezüglich für die beiden Gleichungsformen

$$f_{(x,\ y,\ z)} = 0$$

und

$$f_{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)} = 0$$

das Krümmungsmass durch die beiden Ausdrücke

$$K = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

und

$$K = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}$$

gegeben ist. Um die durch das Verschwinden dieser Determinanten bedingten geometrischen Beziehungen klar zu übersehen, möge an folgendes erinnert werden.

In unmittelbarer Nähe eines Punktes kann jede Fläche als mit einer Fläche zweiter Ordnung zusammenfallend angesehen werden. Um die Krümmungsverhältnisse in einem willkürlichen Punkte zu studiren, betrachtet man mit Dupin [22]) eine der Tangentialebene jenes Punktes parallele unendlich wenig von ihr abstehende Ebene. Dieselbe schneidet jene Hülfsfläche zweiter Ordnung in einem unendlich kleinen Kegelschnitte, der Indicatrix, und je nachdem dieser Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, hat man nach Dupin einen elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Flächenpunkt. Ein ausschliesslich hyperbolisch und ein ausschliesslich elliptisch gekrümmter Theil der Fläche werden durch eine Linie parabolischer Punkte geschieden.

Wird also $K = 0$, so können wir diess mit Salmon [23]) folgendermassen geometrisch deuten:

Die Punkte der Krümmung Null einer Fläche mten Grades, d. h. die parabolischen Punkte derselben, liegen auf einer durch das Verschwinden der Hesse'schen Determinante repräsentirten Fläche vom Grade $4(m - 2)$.

Diese Fläche führt den Namen: Hesse'sche Fläche.

Durch das Verschwinden der der Hesse'schen adjungirten Determinante sind $3l(l - 2)$ Rückkehr- oder Cuspidalpunkte bedingt, welche auf einer Curve der lten Classe liegen — diess sind Punkte, in welchen das Mass der Krümmung einen unendlich grossen Werth annimmt.

l ist hier der Grad jener homogenen Functionen, welche die Elemente der adjungirten Determinante sind.

Beispiel. Bezeichnen wir die ersten und zweiten Differentialquotienten von z nach x und y in der in §. 5 angegebenen (Euler'schen) Weise, so kann man, um von diesen Ausdrücken zu den Differentialquotienten der impliciten Form überzugehen, nach Salmon [23]) folgendes System von Gleichungen benützen:

$$\begin{aligned} f_1 + pf_3 &= 0, \\ f_2 + qf_3 &= 0, \\ f_{11} + 2f_{13}p + f_{33}p^2 &= -rf_3, \\ f_{12} + pf_{23} + qf_{13} + pqf_{33} &= -sf_3, \\ f_{22} + 2f_{23}q + f_{33}q^2 &= -tf_3. \end{aligned}$$

Für eine developpable Fläche ist $p = q = 0$; man hat also

$$f_3 = 1,\ f_1 = f_2 = 0,\ f_{11} = -rf_3,\ f_{12} = f_{21} = -sf_3,$$
$$f_{22} = -tf_3,\ f_{13} = f_{31} = f_{23} = f_{32} = f_{33} = 0,$$

und man erhält somit die Gleichung der Hesse'schen Fläche in nachstehender Form:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ 0 & -rf_3 & -sf_3 & 0 \\ 0 & -sf_3 & -tf_3 & 0 \\ f_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = rt - s^2 = 0.$$

Die Hesse'sche Determinante hat also denselben Werth, wie die linke Seite der auf Null gebrachten Flächengleichung; jeder Punkt einer abwickelbaren Fläche ist ein parabolischer.

1) Jacobi, De determinantibus functionalibus, Crelle's Journ. f. d. reine u. angew. Math., 22. Band. S. 318 ff.

2) Ibid. S. 328.

3) Günther, Ueber einige Anwendungen und Erweiterungen des Hauber'schen Theorems, Grunert's Arch. d. Math. u. Phys., 55. Theil. S. 18.

4) Jacobi S. 337.

5) Jacobi, De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium, Crelle's Journal, 12. Band. S. 38.

6) Catalan, Mémoires couronnés par l'acad. de Brux., tome 14.

7) Baehr, Note sur le changement des variables dans les intégrales multiples, Grunert's Archiv, 41. Theil. S. 474.

8) Hoppe, Inhalt des Sechsflachs zwischen orthogonalen Flächen zweiten Grades und seiner Seiten, Arch. d. Math. u. Phys. 56. Theil. S. 354.

9) Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comment. recent. Gottign. Tom. VI.

10) Baltzer, Ableitung der Gauss'schen Formeln für die Flächenkrümmung, Ber. d. kgl. sächs. Gesllschft d. Wssschftn, 1866. S. 1 ff.

11) Baltzer, Determinanten, S. 138.

12) Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1872. S. 113.

13) Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abhandl. d. Königl. Ges. d. Wssschftn zu Göttingen, 13. Band. S. 1 ff.

14) Beez, Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, Mathematische Annalen, 7. Band. S. 387 ff.

15) Kronecker, Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabelen, Berliner Monatsberichte, 1869. S. 695.

16) Sylvester, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, VI. S. 186.

17) Salmon, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, deutsch v. Fiedler, Leipzig 1863. S. 100.

18) L. Euler, Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, Petrop. 1736. tom. II. §. 106.

19) Hesse, Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, Crelle's Journal, 28. Band. S. 103.

Id. Ueber Curven dritter Classe und dritter Ordnung, Ibid. 38. Band. S. 242.

20) Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871. S. 192.

21) Bammert, Ueber Inflexionscurven, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 10. Jahrgang. S. 165.

22) Dupin, Développements de Géométrie, Paris 1842. S. 48.

23) Salmon, Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen, deutsch v. Fiedler, Leipzig 1865. S. 271.

Kapitel IX.

Lineare Substitutionen.

§. 1. Wir haben im vorigen Kapitel (§. 7) die interessante Thatsache registrirt, dass eine gewisse Function, die Hesse'sche Determinante, einer linearen Transformation ihrer Variablen unterworfen wurde und sich hiebei nur um einen Faktor, nämlich das Quadrat der Substitutionsdeterminante, änderte. Es liegt nun nahe, alle die Functionen, welche bei Vornahme linearer Substitutionen ein ähnliches Verhalten zeigen, unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte zu betrachten. In der That hat diess Bestreben bereits zur Gründung eines neuen Wissenszweiges, der sogenannten modernen Algebra oder Invariantentheorie, geführt, in welcher die linearen Transformationen eine eingehende Behandlung erfahren haben; die Bedeutung dieser Umformung hat sich dann in neuester Zeit durch die von Clebsch [1]) gemachte Entdeckung wesentlich gesteigert, dass eine gewisse für jede algebraische Curve und Fläche charakteristische Zahl sich nicht ändert, wenn man das betreffende Gebilde in einer Weise umgestaltet, deren analytischer Ausdruck eben eine lineare Substitution ist.

Als Fundamentalsatz dieser Disciplin kann folgender aufgefasst werden. Es seien die Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

jede von n Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ abhängig. Wir setzen dann

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 &= a_{22}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{aligned}$$

und bezeichnen den Ausdruck

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

als Determinante oder Modulus der linearen Substitution. Dass $\triangle$ von Null verschieden ist, so lange $x_1 \ldots x_n$ unabhängige Grössen sind, ergiebt sich aus Kap. V. §. 2. Nun können wir sagen:

Sind die Functionen f linear aus den Veränderlichen x zusammengesetzt, und führen wir anstatt letzterer die durch das obige System repräsentirten Grössen y ein, so ist die Determinante des Systemes der transformirten Functionen gleich dem Producte aus der Determinante des Systemes der gegebenen Functionen in den Modulus der linearen Substitution.

Während ursprünglich die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n, \\ f_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n \end{aligned}$$

bestanden, ist nun bezüglich

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n, \\ f_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n &= c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \ldots + c_{nn}y_n \end{aligned}$$

geworden. Um c_{ik} zu finden, muss man $x_1, x_2 \ldots x_n$ der Reihe nach mit $b_{i1}, b_{i2} \ldots b_{in}$ multipliciren, diese Produkte addiren, und in dieser Summe den Coëfficienten von y_k aufsuchen. Das heisst aber nichts andres als, es ist

$$c_{ik} = b_{i1}a_{1k} + b_{i2}a_{2k} + \ldots + b_{in}a_{nk}.$$

Es ist also dem Multiplikationssatze gemäss

$$\begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix},$$

und diess war zu beweisen. Dieser Beweis ist der Hauptsache nach auf Joachimsthal [2]) zurückzuführen.

Beispiel. Es seien gegeben drei Ebenen im Raume mit den Gleichungen

$$f_1 = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$f_2 = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$f_3 = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Man drehe nun das Coordinatensystem um den Anfangspunkt; durch diese Transformation ändert sich das constante Glied der Ebenengleichung nicht; während also, wenn x', y', z' die neuen Coordinaten bedeuten,

$$x = \alpha_1x' + \beta_1y' + \gamma_1z', \quad y = \alpha_2x' + \beta_2y' + \gamma_2z',$$
$$z = \alpha_3x' + \beta_3y' + \gamma_3z'$$

wird, stellen sich die drei Ebenen nunmehr in folgender Gestalt dar:

$$f_1 = A_1x' + B_1y' + C_1z',$$
$$f_2 = A_2x' + B_2y' + C_2z',$$
$$f_3 = A_3x' + B_3y' + C_3z',$$

und man erhält die auch geometrisch leicht zu erweisende Relation:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

§. 2. Unter den linearen Substitutionen besonders wichtig sind die orthogonalen, mit welchen sich bereits Euler[3]) und Cauchy[4]) beschäftigten; der Name rührt her von Cayley. Man kann zur Entwicklung der Eigenschaften dieser Substitution von einer Grundgleichung ausgehend dieselben aus dieser ableiten; wir wollen hier nach dem Vorgang von Veltmann[5]) den umgekehrten Weg einschlagen.

Setzen wir

$$b_{ik} = -b_{ki}, \quad b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn},$$

so ist die orthogonale Substitution durch folgendes System linearer Gleichungen ausgedrückt:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + \ldots + b_{n1}y_n,$$
$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{n2}y_n,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n = b_{1n}y_1 + b_{2n}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n.$$

Löst man diess System das einemal nach den x, das andremal nach den y auf, so erhält man Determinanten von der Beschaffenheit, dass die Zeilen der einen bezüglich die Colonnen der andren

sind, dass also nach Kap. II. §. 2 zwischen beiden Gleichheit stattfindet.

Indem jede solche Determinante $= \triangle$ und

$$\beta_{ik} = \frac{d\triangle}{db_{ik}}$$

gesetzt wird, erhält man die den beiden vorigen adjungirten Determinanten

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & . & . & \beta_{1n} \\ . & . & . & . \\ \beta_{n1} & . & . & \beta_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} \beta_{11} & . & . & \beta_{n1} \\ . & . & . & . \\ \beta_{n1} & . & . & \beta_{nn} \end{vmatrix},$$

welche einander aus dem nämlichen Grunde gleich sind. Die oben angedeuteten Auflösungen des Systemes nach den x und y ergeben

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n,$$
$$x_k = g_{k1}x_1 + g_{k2}x_2 + \ldots + g_{kn}x_n;$$

demnach ist also

$$c_{ik} = \frac{\beta_{i1}b_{1k} + \beta_{i2}b_{2k} + \ldots + \beta_{in}b_{nk}}{\triangle}.$$

Addirt man zu dieser Gleichung die weitere

$$s = \beta_{i1}b_{k1} + \beta_{i2}b_{k2} + \ldots + \beta_{in}b_{kn}.$$

so erhält man, da ja $b_{ik} = -b_{ki}$, $b_{ii} = b_{kk}$ ist,

$$c_{ik}\triangle + s = 2\beta_{ik}b_{kk}.$$

Der Ausdruck s hat nach Kap. II. §. 12 entweder den Werth $\triangle$ oder Null; es wird also

$$c_{ik} = -c_{ki} = \frac{2\beta_{ik}b_{kk}}{\triangle}, \quad c_{ii} = \frac{2\beta_{ii}b_{ii} - \triangle}{\triangle}.$$

Bestimmen wir nun ebenso g_{ki}, wie vorhin c_{ik}. Man hat

$$g_{ki} = \frac{\beta_{1k}b_{i1} + \beta_{2k}b_{i2} + \ldots + \beta_{nk}b_{ni}}{\triangle},$$

und wenn auf beiden Seiten

$$s' = \beta_{1k}b_{1i} + \beta_{2k}b_{2i} + \ldots + \beta_{nk}b_{ni}$$

hinzugenommen wird,

$$g_{ki}\triangle + s' = 2\beta_{ik}b_{ii}.$$

Der gleiche Grund, wie oben, bedingt es, dass

$$g_{ki} = -g_{ik} = \frac{2\beta_{ik}b_{ii}}{\triangle}, \quad g_{ii} = \frac{2\beta_{ii}b_{ii} - \triangle}{\triangle}$$

sein muss; d. h. es ist $g_{ki} = -g_{ik} = c_{ik} = -c_{ki}$. Dem obigen Systeme kann man sonach folgendes doppelte substituiren:

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \quad x_1 = c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{n1}x_n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n; \quad x_n = c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n.$$

Aus diesen beiden Systemen lassen sich mit Berücksichtigung der für die Grössen c gefundenen Relationen folgende beide Sätze herleiten:

Für die Variablen und Constanten einer orthogonalen Transformation gelten stets folgende Wahrheiten. Es ist

$$1)\ c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c^2_{ni} = 1,$$

$$2)\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Um 1) zu finden, quadrire man jede Gleichung des zweiten Systemes und addire dieselben hierauf sämmtlich. Da dann allgemein

$$c_{lm}\, c_{pq} = -\, c_{ml}\, c_{pq}$$

ist, so müssen sich bei der Addition alle doppelten Produkte wegheben. Es ist also

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x_1^2\,(c_{11}^2 + \ldots + c_{1n})^2 + \ldots + x^2_n\,(^2c_{n1} + \ldots + c^2_{nn}).$$

Diese Gleichung kann aber nur dann bestehen, wenn allgemein

$$c^2_{i1} + c^2_{i2} + \ldots + c^2_{in} = 1$$

ist. Setzt man hier statt c_{ik} den Werth $(-c_{ik}) = c_{ki}$, so bleibt die Gleichung ungeändert, und damit ist Nummer 1) bewiesen.

Verfährt man in gleicher Weise mit dem ersten Systeme, so ergiebt sich unverzüglich Relation 2). Das Bestehen dieser Relation hat der hier betrachteten Substitution ihren Namen verschafft.

Es soll nun noch der Werth der Substitutionsdeterminante bestimmt werden. Es ist dem Obigen zufolge

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b_{11}}{\Delta} & \frac{b_{12}}{\Delta} & \ldots & \frac{b_{1n}}{\Delta} \\ \frac{b_{21}}{\Delta} & \frac{b_{22}}{\Delta} & \ldots & \frac{b_{2n}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{b_{n1}}{\Delta} & \frac{b_{n2}}{\Delta} & \ldots & \frac{b_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \ldots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Setzt man im ersten Faktor des Produkts der jeder Colonne gemeinschaftlichen Faktor vor dieselbe, so wird

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\triangle^n} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdot & \cdot & \beta_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1n} & \cdot & \cdot & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Der erste Faktor hat nun den Werth $\triangle$, der zweite, wenn man sich der Bedeutung des Symboles β erinnert und Kap. III. §. 3 berücksichtigt, den Werth $\triangle^{n-1}$; es ist also

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\triangle \triangle^{n-1}}{\triangle^n} = 1.$$

Diess giebt noch folgendes Corollar zu dem bereits Gefundenen:

Die Determinante (Modulus) einer orthogonalen Substitution hat den Werth 1.

Nach Sylvester [6]) nennt man eine solche Determinante unimodular.

Mit Hülfe der hier entwickelten Formeln lassen sich die bei der Drehung eines rechtwinkligen Axensystems im Raume vorkommenden Beziehungen zwischen den Richtungscosinus der einzelnen Axen weit leichter und bequemer darstellen, als diess auf andrem Wege [7]) geschehen kann.

§. 3. Wir wollen nunmehr blos eine einzige Funktion

$$f_{(x_1, x_2 \ldots x_n)}$$

von n Variabelen in's Auge fassen und dieselbe durch eine lineare Substitution in eine Funktion

$$\varphi_{(y_1, y_2 \ldots y_n)}$$

verwandeln. Bildet man die Hesse'schen Determinanten der ursprünglichen, wie der umgeänderten Funktion nach Kap. VIII. §. 7, so ist, wie diess schon (ebenda) bewiesen ward,

$$H(f_g) = H(f_x)\triangle^2.$$

Während also bei den in §. 1 untersuchten Transformationen die erste Potenz des Modulus als Faktor zu der Determinante der Coëfficienten des transformirten Systemes hinzutrat, haben wir hier sein Quadrat als Faktor erhalten. Indem Cayley diess Verhalten gewisser Funktionen allgemein studirte, gelangte er dazu, mit dem Namen der Hyperdeterminanten solche Functionen zu belegen, welche von irgendwelchen linearen Substitutionen betroffen sich

nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante von ihrem ursprünglichen Werthe unterscheiden [8]). Die Definition Cayley's hat man in spätrer Zeit bestimmter gefasst und besonders den wenig bezeichnenden Namen der Hyperdeterminanten durch eine andere Terminologie ersetzt, welche auch den verschiednen Formen jener Gesammtbezeichnung Rechnung trägt. Wir geben diese Definition, wie sie sich in neuester Zeit herausgebildet hat, mit den Worten von Clebsch [9]):

In der Formentheorie untersucht man solche ganze rationale Verbindungen der Coëfficienten und der Veränderlichen, welche bis auf eine Potenz des Modulus denselben Werth annehmen, gleichviel, ob man sie für die ursprüngliche oder für die transformirte Function bildet. Enthält eine solche Verbindung nur die Coëfficienten, so nennt man sie Invariante; enthält sie auch die Veränderlichen, so wird sie Covariante genannt.

Von so hervorragender Wichtigkeit die Invariantentheorie auch unstreitig ist, so müssen wir uns doch hier begnügen, an einigen Beispielen die eben aufgestellte Definition zu illustriren und so ihren Zusammenhang mit der Lehre von den Determinanten in's Licht zu setzen.

§. 4. Die Function

$$a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$$

hat folgende Invariante [10])

$$a_0a_2 - a_1^2,$$

welche wir (nach Kap. V. §. 9) auch als ihre Discriminante bezeichnen dürfen. Denn setzt man

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2, \end{aligned} \quad \left| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right| = r,$$

so erhält man jetzt die obige Funktion in folgender Form:

$$a'_0y_1^2 + 2a'_1y_1y_2 + a'_2y_2^2.$$

Wird aber jetzt die Discriminante

$$a_0'a'_2 - a'^2_1$$

hergestellt, so ist dieselbe gleich

$$\left| \begin{matrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \right| \cdot \left[\left| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right| \right]^2 = (a_0a_2 - a_1^2)r^2.$$

Wir haben also, wenn wir jeden aus n Veränderlichen ganz

und rational zusammengesetzten Ausdruck eine Form nennen, folgendes gefunden:

Die Discriminante einer binären Form ist eine Invariante.

Auch für Covarianten besitzen wir ein naheliegendes Beispiel. Schreiben wir in der vorhin erwähnten Gleichung

$$H(f_y) = H(f_x)\,\Delta^2$$

$H(f_y)$ und $H(f_x)$ wirklich hin, so zeigt sich, dass in letztrer Determinante die einzelnen Elemente Functionen der Variablen x sind. Daraus folgt aber:

Für jede beliebige Function ist die Hesse'sche Determinante eine Covariante.

Es seien ferner zwei binäre quadratische Formen gegeben:

$$f = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2,$$
$$\varphi = b_0x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + b_2x_2^2.$$

Hat dann r die nämliche Bedeutung wie soeben, so ist [11]).

$$\begin{vmatrix} a'_0y_1 + a'_1y_2 & b'_0y_1 + b'_1y_2 \\ a'_1y_1 + a'_2y_2 & b'_1y_1 + b'_2y_2 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_0x_1 + a_1x_2 & b_0x_1 + b_1x_2 \\ a_1x_1 + a_2x_2 & b_1x_1 + b_2x_2 \end{vmatrix};$$

diese letztre Determinante ist also eine simultane Covariante der beiden Formen.

Historisch möge über die Ziele und bisherigen Erfolge der Invariantentheorie noch Folgendes bemerkt werden. Man musste sich die Frage vorlegen, ob es eine abgeschlossne Anzahl von Ausdrücken gäbe, denen invariante Eigenschaften zukommen, oder ob diess nicht der Fall sei. Während Cayley [12]) zuerst der Ansicht gehuldigt hatte, dass diese Anzahl eine unbegränzte sei, regten sich von verschiedenen Seiten Zweifel hiergegen, und zwar suchte man die Frage zunächst für binäre Formen (mit zwei Variablen und drei Constanten) zu entscheiden. Es gelang Gordan [13]) den Nachweis exakt zu erbringen, dass es für diese Formen ein endliches System von Invarianten und Covarianten gäbe, so zwar, dass jede andre Invariante oder Covariante sich rational und ganz aus diesen zusammensetzen lasse.

Diese Thatsache hat dann auch Cayley [14]) neuerdings als richtig anerkannt.

§. 5. In diesem Paragraphen soll noch ein spezieller Fall von linearer Transformation behandelt werden, welcher sich für die höhere Geometrie von hervorragender Wichtigkeit erwiesen hat.

Unter einer bilinearen Form versteht man einen Ausdruck, welcher aus 2n Veränderlichen

$$x_1, x_2 \ldots x_n; y_1, y_2 \ldots y_n$$

linear zusammengesetzt ist; symbolisch wird ein solcher Ausdruck durch eine Doppelsumme dargestellt werden müssen. Es seien zwei solche bilineare Formen

$$P = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} x_i x_k,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} B_{ik} x_i x_k$$

gegeben. Bildet man dann, unter p und q beliebige Zahlen verstanden, die durch (P, Q) zu bezeichnende Determinante des Systemes pP + qQ, d. h.

$$(P, Q) = \begin{vmatrix} pA_{11} + qB_{11} & pA_{12} + qB_{12} & pA_{13} + qB_{13} \ldots & pA_{1n} + qB_{1n} \\ pA_{21} + qB_{21} & pA_{22} + qB_{22} & pA_{23} + qB_{23} \ldots & pA_{2n} + qB_{2n} \\ pA_{31} + qB_{31} & pA_{32} + qB_{32} & pA_{33} + qB_{33} \ldots & pA_{3n} + qB_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ pA_{n1} + qB_{n1} & pA_{n2} + qB_{n2} & pA_{n3} + qB_{n3} \ldots & pA_{nn} + qB_{nn} \end{vmatrix},$$

so ist diese Determinante ersichtlich eine homogene ganze Funktion nten Grades von p und q, kann also in ein Produkt von n Faktoren zerlegt werden, deren jeder homogen und linear aus p und q sich zusammensetzt. Ueber diese Zerlegung hat nun Weierstrass [15]) eine Reihe eleganter Betrachtungen angestellt, die im Folgenden wiedergegeben werden sollen.

Denken wir uns die obige Determinante als Produkt geschrieben, so werden die einzelnen Faktoren im Allgemeinen von der Form

$$(ap + bq)^1$$

sein, die (l + 1)te Potenz von (ap + bq) würde alsdann in (P, Q) nicht mehr ohne Rest aufgehen. Bildet man aus (P, Q) sämmtliche kte Unterdeterminanten (n — k)ter Ordnung, so sind diess ganze homogene Funktionen (n — k)ten Grades von p und q. Gewisse Potenzen von (ap + bq) werden auch in diesen Unterdeterminanten ohne Rest enthalten sein; jedoch wird der Exponent der höchsten Potenz, bei welcher diess Aufgehen noch stattfindet, nicht mehr l, sondern irgend eine kleinere Zahl $l^{(k)}$ sein.

Zerlegt man eine beliebige (k — 1)te Unterdeterminante von (P, Q) nach den Elementen einer beliebigen Reihe in Minoren, so stellt sich dieselbe dar als ein Aggregat von Gliedern aus zwei

Faktoren, deren einer ein Element von (P, Q), der andre eine Unterdeterminante (n — k)ten Grades ist; es muss also jede in einer Unterdeterminante von letztrem Grade aufgehende Zahl auch in jeder Determinante von einem höheren, als dem (n — k)ten Grade enthalten sein. Dem Vorhergesagten ist also zu entnehmen, dass die Reihe

$$1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ 1^{(IV)} \ldots 1^{(k)} \ldots 1^{(r-1)}$$

eine stetig abnehmende ist, und dass, wenn irgend ein Glied derselben den Werth Null annimmt, diess auch das Verschwinden aller übrigen zur nothwendigen Folge hat. Wird also

$$e = 1 - 1',\ e' = 1' - 1'' \ldots e^{(r-1)} = 1^{(r-1)}$$

gesetzt, so sind sämmtliche e positive Zahlen, und es ist

$$(ap + bq)^1 = (ap + bq)^e\,(ap + bq)^{e'} \ldots (ap + bq)^{e^{(r-1)}}.$$

Im Ganzen giebt es r Faktoren von $(ap + bq)^1$; jeder solche Faktor wird von Weierstrass [16]) ein Elementartheiler der Determinante (P, Q) genannt. Zunächst gilt dann also der Satz:

Die Determinante (P, Q) ist gleich dem Producte ihrer sämmtlichen Elementartheiler in eine von p und q unabhängige Grösse.

Hierauf aber stützt sich dann der Beweis eines andren wichtigen Lehrsatzes, welcher von seinem Erfinder [17]) folgendermassen formulirt wird:

Es werde durch die Substitutionen

$$x_1 = \sum_{i=1}^{i=n} h_{1i}u_i \ldots x_n = \sum_{i=1}^{i=n} h_{ni}u_i,$$

$$y_1 = \sum_{i=1}^{i=n} k_{1i}v_i \ldots y_n = \sum_{i=1}^{i=n} k_{ni}v_i,$$

wo $u_1 \ldots u_n$ und $v_1 \ldots v_n$ neue Veränderliche bedeuten, $h_{11} \ldots h_{nn}$, $k_{11} \ldots k_{nn}$ aber Constanten, welche keiner andren Beschränkung unterworfen sind, als dass die Determinanten

$$H = \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix},\quad K = \begin{vmatrix} k_{11} & \ldots & k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein dürfen, die Form

$P(x_1 \ldots x_n;\ y_1 \ldots y_n)$ in eine andere $P'(u_1 \ldots u_n;\ v_1 \ldots v_n)$

und zugleich

$Q(x_1 \ldots x_n;\ y_1 \ldots y_n)$ in $Q'(u_1 \ldots u_n;\ v_1 \ldots v_n)$

verwandelt, so stimmen die Determinanten der beiden Formen in ihren Elementartheilern überein.

Ist

$$P' = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{l=1}^{l=n} A'_{ik}\, u_i\, v_k, \quad Q' = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{l=1}^{l=n} B'_{ik}\, u_i\, v_k,$$

so ist

$$(P', Q') = \begin{vmatrix} pA'_{11} + qB'_{11} & pA'_{12} + qB'_{12} & \cdot\cdot & pA'_{1n} + qB'_{1n} \\ pA'_{21} + qB'_{21} & pA'_{22} + qB'_{22} & \cdot\cdot & pA'_{2n} + qB'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ pA'_{n1} + qB'_{n1} & pA'_{n2} + qB'_{n2} & \cdot\cdot & pA'_{nn} + qB'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nach dem Bildungsgesetz der Elemente ist aber diese Determinante gleich dem Produkte der drei folgenden

$$\begin{vmatrix} pA_{11} + qB_{11} & pA_{12} + qB_{12} & \cdot\cdot & pA_{1n} + qB_{1n} \\ pA_{21} + qB_{21} & pA_{22} + qB_{22} & \cdot\cdot & pA_{2n} + qB_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ pA_{n1} + qB_{n1} & pA_{n2} + qB_{n2} & \cdot\cdot & pA_{nn} + qB_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdot\cdot & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdot\cdot & h_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdot\cdot & h_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot\cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot\cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot\cdot & k_{nn} \end{vmatrix},$$

d. h. es ist

$$(P', Q') = HK\,(P, Q).$$

Jeder Theiler von (P, Q) geht demnach auch in (P′, Q′) ohne Rest auf. Bildet man eine beliebige k te Unterdeterminante (n—k)ten Grades von (P′, Q′), so lässt sich dieselbe der eben bewiesenen Gleichung zufolge darstellen als eine algebraische Summe aus drei Faktoren, welche bezüglich gleichgradige Unterdeterminanten von H, K und (P, Q) sind, und deshalb ist auch jeder Theiler einer Unterdeterminante von (P, Q) zugleich ein Theiler der Unterdeterminanten eben so hohen Grades von (P′, Q′). Da nun aber P′ in P und Q′ in Q übergeht, sobald man die oben stehenden Transformationsgleichungen nach u und v auflöst und bezüglich für diese u und v lineare Funktionen der x und y substituirt, so muss umgekehrt auch jeder Theiler einer k ten Unterdeterminante von (P′, Q′) auch in einer jeden k ten Unterdeterminante von (P, Q) ohne Rest aufgehen.

Es kann demnach auch keine höhere Potenz von (ap + bq), als

$$(ap + bq)_1$$

in (P′, Q′) enthalten sein; ebenso ist

$$(ap + bq)^{l(k)}$$

die höchste in allen kten Unterdeterminanten (n — k)ter Ordnung enthaltene Potenz jenes linearen Ausdrucks. Die r Faktoren, in welche die lte Potenz desselben sich zerlegen liess, nämlich

$$(ap + bq)^{l-l'}, (ap + bq)^{l'-l''} \ldots (ap + bp)^{l^{(r-1)}}$$

sind also auch die Faktoren des entsprechenden Theilers von (P′, Q′); oder, wie wir diess Verhalten im Anschluss an die obige Definition auch charakterisiren können:

Die Elementartheiler der beiden Determinanten (P, Q) und (P′, Q′) sind einander successive gleich.

Der hier bewiesne Satz gestattet die Umkehrung, für welche Weierstrass [18]) ebenfalls den Beweis gegeben hat.

§. 6. Wie schon bemerkt, ist die im Vorstehenden entwickelte Theorie von Wichtigkeit für die Geometrie des Raumes geworden. Betrachtet man mit Plücker die gerade Linie als Element, und giebt man durch

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 \text{ und } x_1 : x_2 : x_3 : x_4$$

zwei Punkte in homogenen Coordinaten an, so kann man für die durch diese Punkte gelegte Gerade folgende 6 Relationen:

$$p_{12} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \; p_{13} = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \; p_{14} = \begin{vmatrix} y_1 & y_4 \\ z_1 & z_4 \end{vmatrix}, \; p_{34} = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$p_{42} = \begin{vmatrix} y_4 & y_2 \\ z_4 & z_2 \end{vmatrix}, \; p_{23} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

aufstellen. Diese Determinanten vom zweiten Grade bezeichnet Plücker als Coordinaten der geraden Linie [19]); zwischen denselben besteht noch die Relation:

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Nehmen wir hierauf an, es bestünde noch zwischen den einzelnen Coordinaten eine Gleichung

$$\Phi_{(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)} = 0,$$

so wird durch diese beiden Gleichungen aus der ursprünglich fünffach ausgedehnten Mannigfaltigkeit eine niedrigere Mannigfaltigkeit von 3fach unendlich vielen Geraden ausgeschieden, welche Plücker (s. o.) als Complex bezeichnet hat. Je nachdem die Funktion Φ vom ersten, zweiten etc. Grade ist, wird der zugehörige Complex ein linearer, quadratischer etc. genannt. Das Problem, diese letzteren Complexe allgemein analytisch zu discutiren, hat zuerst F. Klein [20])

aufgenommen und gelöst; er zeigte, dass es als spezieller Fall in den allgemeinen Untersuchungen von Weierstrass über bilineare Formen enthalten sei. Wir betrachten hier nur kurz die Complexe zweiten Grades.

Werden für die Variablen p neue Veränderliche x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 eingeführt, so möge P in P′ und Φ in Φ' übergehen; es ist dann

$$P' = \sum_{i=1\ k=1}^{i=6\ k=6} a_{ik}\, x_i\, x_k, \quad \Phi' = \sum_{i=1\ k=1}^{i=6\ k=6} b_{ik}\, x\, {}_i x_k .$$

Bildet man die Determinante des Systemes $\Phi' + \lambda P'$, so ist dieselbe

$$(P', \Phi') = \begin{vmatrix} b_{11}+\lambda a_{11} & b_{12}+\lambda a_{12} & b_{13}+\lambda a_{13} & b_{14}+\lambda a_{14} & b_{15}+\lambda a_{15} & b_{16}+\lambda a_{16} \\ b_{21}+\lambda a_{21} & b_{22}+\lambda a_{22} & b_{23}+\lambda a_{23} & b_{24}+\lambda a_{24} & b_{25}+\lambda a_{25} & b_{26}+\lambda a_{26} \\ b_{31}+\lambda a_{31} & b_{32}+\lambda a_{32} & b_{33}+\lambda a_{33} & b_{34}+\lambda a_{34} & b_{35}+\lambda a_{35} & b_{36}+\lambda a_{36} \\ b_{41}+\lambda a_{41} & b_{42}+\lambda a_{42} & b_{43}+\lambda a_{43} & b_{44}+\lambda a_{44} & b_{45}+\lambda a_{45} & b_{46}+\lambda a_{46} \\ b_{51}+\lambda a_{51} & b_{52}+\lambda a_{52} & b_{52}+\lambda a_{53} & b_{54}+\lambda a_{54} & b_{55}+\lambda a_{55} & b_{56}+\lambda a_{56} \\ b_{61}+\lambda a_{61} & b_{62}+\lambda a_{62} & b_{63}+\lambda a_{63} & b_{64}+\lambda a_{64} & b_{65}+\lambda a_{65} & b_{66}+\lambda a_{66} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante bleibt bei beliebigen linearen Transformationen der Variablen für jeden Complex dieselbe; sie ist also, da sie diese Variablen selbst nicht enthält, nach §. 3 eine Invariante für denselben.

Da (P′, Φ') offenbar eine ganze rationale Function sechsten Grades von λ ist, so kann man

$$(P', \Phi') = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1} (\lambda-\lambda_2)^{\nu_2} \ldots (\lambda-\lambda^i)^{\nu_i} \ldots$$

setzen, wo λ_i eine ν_i fache Wurzel von λ in der Gleichung (P′, Φ')=0 bedeutet, so jedoch dass

$$S\nu_i = 6$$

sein muss.

Nehmen wir nun an, es sei der Faktor $(\lambda - \lambda_i)$ der Determinante (P′ Φ') in allen ersten Unterdeterminanten derselben ν'_i mal, in allen zweiten ν_i'' mal etc., überhaupt in allen k ten $\nu_i^{(k)}$ mal enthalten, so ist nach §. 5, wenn wir

$$e_i = \nu_i - \nu'_i, \quad e'_i = \nu'_i - \nu''_i \ldots e_i^{(k)} = \nu_i^{(k)} - \nu_i^{(k+1)} \ldots$$

setzen, jedes dieser e grösser als das unmittelbar nach ihm kommende; man hat dann

$$(\lambda - \lambda_i)^{\nu i} = (\lambda - \lambda_i)^{e_i} (\lambda - \lambda_i)^{e'i} \ldots (\lambda - \lambda_i) e_i^{(k)} \ldots$$

in seine Elementartheiler (§. 5) zerlegt.

Nun wissen wir aber Folgendes. Soll ein bilineares Formenpaar P, Φ in ein andres P', Φ' linear transformirbar sein, so müssen dieselben in ihren Elementartheilern übereinstimmen. Diese Formenpaare, gleich Null gesetzt, liefern also den nämlichen Complex, wenn in den Determinanten beider die Vertheilung der Wurzeln und Elementartheiler die gleiche ist; vertheilen wir also in der Determinante (P', Φ') die Wurzeln und Elementartheiler auf alle mögliche Weise, so erhalten wir nacheinander alle denkbaren quadratischen Complexe.

Gestützt auf diese Thatsachen hat A. Weiler [21]), dessen Darstellung wir bisher hauptsächlich gefolgt sind, eine Eintheilung und Beschreibung sämmtlicher Complexe vom zweiten Grade durchgeführt und hiebei gefunden, dass es im Ganzen 58 wesentlich verschiedene gäbe [22]).

1) Clebsch, Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, Crelle's Journal f. die reine u. angew. Math., 63. Band. S. 189 ff.

2) Joachimsthal, Sur quelques applications des déterminants à la géométrie, Crelle's Journal, 40. Band. S. 21.

3) L. Euler, Novi Commentarii Petropolitani, Tom. XV. S. 75.

4) Cauchy, Exercices de Mathématiques, Paris 1830, IV. S. 140.

5) Veltmann, Beiträge zur Theorie der Determinanten, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys., 16. Jahrgang. S. 523.

6) Sylvester, Cambridge and Dublin mathem. Journal, VII. S. 52.

7) Schläfli, Ueber die Relation zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinaten-Systeme bestimmt wird, Grunert's Archiv d. Math. u. Phys., 13. Theil. S. 276.

8) Cayley, Mémoire sur les hyperdéterminants, Crelle's Journal, 30. Band. S. 1.

9) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872. S. 3.

10) Ibid. S. 3.

11) Ibid. S. 4.

12) Cayley, Upon quantics, Transactions of London, CXLVI. S. 101.

13) Gordan, Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coëfficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist; Crelle's Journal, 69. Band. S. 323.

14) Cayley, A ninth memoir on quantics, Trans. of London, CLXI. S. 17 ff.

15) Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Berliner Monatsberichte 1868. S. 310.

16) Ibid. S. 311.

17) Ibid. S. 312.

18) Ibid. S. 314 ff.

19) Plücker, Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig 1869.

20) F. Klein, Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form, Bonn 1868.

21) A. Weiler, Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades, Mathematische Annalen, 7. Band. S. 145 ff.

22) Ibid. S. 150.

Verbesserungen.

S. 6. Z. 10 v. o. ist §. 4 zu streichen. S. 12. Z. 3 v. u. st. 2 | 2 l. 2 | 3. S. 17. Z. 5 u. 7. v. o. st. ξ l. ζ. S. 46. Z. 19 v. o. st. 8 l. n. S. 69. Z. 21 v. o. st. Weihrauch l. Weyrauch. S. 69. Z. 24 v. o. st. 420 l. 354. S. 81. Z. 14 v. o. st. einer Determinante $\triangle$ l. einer adjungirten Determinante $\triangle'$. S. 91. Z. 11 v. o. st. $\binom{m+1}{1}$ l. $\binom{m+2}{1}$. S. 100. Z. 13 v. u. st. $-2n$ l. $-2n+4$. S. 106. Vor Zeile 1 ist einzuschieben: Schütz, Ueber functionale Congruenzen, Frankfurt 1867. S. 9. — Jede folgende Nummer ist um 1 zu erhöhen. S. 107. Z. 14 v. u. st. italinische l. italienische. S. 127. Z. 17 v. u. st. a_{1n} l. a_{11}. S. 131. Z. 10 v. u. st. 1(p—1) l. (p—1). S. 154. Z. 16 v. u. st. 302 l. 296. S. 190. Z. 11 v. o. st. — c — a — b l. c — a — b. S. 191. Z. 4 v. o. st. $a^2 \begin{vmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{vmatrix}$ l. $-a^2 \begin{vmatrix} -a & a \\ a & a \end{vmatrix}$. S. 192. Z. 1 v. u. st. p und p_x l. $\triangle$ und $\triangle_x$.

Durch meine längere Abwesenheit vom Druckorte sind in meinem „Lehrbuch der Determinantentheorie“ einige Schreib- und Druckfehler stehen geblieben, deren Verbesserung, da dieselben zum Theil sinnstörend sind, hier folgen möge.

S. 35 Z. 8 v. u. statt $>$ Q. $<$.

S. 56 Z. 16 v. o. st. $\pm\alpha^{k'_1+2}$ l. $\alpha^{k'_1+1}$.

S. 59 Z. 13 v. u. st. Colonne l. Zeile.

S. 62 Z. 10 v. o. st. n l. n!.

S. 67 Z. 14 v. u. st. $\frac{1}{\varrho^3}\ \frac{1}{\varrho^3}$ l. 0 1.

S. 72 Z. 10 v. u. st. $-a_3$ u. $-a_3^2$ l. $-a_2$ u. $-a_2^2$.

S. 74 Z. 2 v. o. st. da_{nq} l. da_{qn}.

S. 95 Z. 10 v. o. zwischen) und] l. y.

S. 123 Z. 6 u. 7 v. o. st. $-$ l. $+$.

S. 127 Z. 14 v. o. st. a_{1n} l. a_{11}.

S. 141 Z. 1, 2, 4 st. a_n l. α_n; Z. 4 st. α_{n-1} l. α_n; Z. 5, 6, 7, 9 statt n—1 u. n l. n—2 u. n—1.

S. 147 Z. 15 v. u. st. erste Gleichung l. ersten Gleichungen.

S. 148 Z. 6 v. o. §. 15 zu streichen.

S. 149 Z 13 v. u. vor dem Komma setze : $= 0$.

S. 172 Z. 2 v. u. st. $=\frac{c}{a}$ l. $-\frac{c}{a}$.

S. 177 Z. 8, 9, 10 st. $+\ +\ +$ l. $-\ -\ -$.

S. 179 ist irrig als 176 bezeichnet.

S. 179 Z. 10 v. u. st. $Q'_{0\ k+1}$ l. $Q'_{0\ k-1}$.

S. 181 Z. 8 v. o. st. A_0 l. A_2.

S. 187 Z. 11 v. o. l. Elementargeometrie.

S. 188 Z. 17 v. o. st. $x_3^2—y_3^2$ l. $x_3^2+y_3^2$; Z. 20 v. o. st. 0 0 l. 0 1.

S. 201 Z. 6 v. u. st. d_k l. dx_k.

S. 207 Z. 3 v. u. st. $-\cos u_2$ l. $-\cos u_3$.

S. 213 Z. 10 v. u. vor dem Komma setze : $= 0$.

S. 229 Z. 3 v. o. nach binären ergänze quadratischen.

S. 229 Z. 11 v. u. st. drei l. n.

S. 233 Z. 17 v. o. st. x l. z; Z. 5 v. u. st. 3 l. 4.

Von demselben Herrn Verfasser sind ferner erschienen:

Studien
zur
theoretischen Photometrie.
gr. 8. 1872. geh. Preis 1 Mark 50 Pf.

Beiträge
zur
Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche.
4°. 1872. geh. Preis 1 Mark 50 Pf.

„Die Abhandlung beschäftigt sich in eingehender Weise mit der Geschichte des ab- und aufsteigenden Kettenbruchs, und führt uns der Reihe nach die Verdienste des Leonardo Pisano, des P. A. Cataldi, Daniel Schwenter's, Lord Brouncker's und Huyghens um diese Grössenformen vor Augen. Vorzugsweise betont er die Verdienste D. Schwenter's um dieselben, aus dessen Deliciae mathematicae er im Anhange noch einige weitere Beiträge zur Geschichte der Mathematik beibringt, die den Werth jener Schrift für letztere noch klarer hervortreten lassen."

Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, 1872.

„Die Untersuchung ist mit grossem Fleisse geführt und zeigt von einer Belesenheit, welche wir recht vielen jüngeren Gelehrten wünschen möchten. Die ganze Darstellung ist so knapp gehalten, dass wir kaum einen Auszug des Inhalts geben können: wenn wir uns nicht auf die wenigen Worte beschränken wollen, dass Herr Günther uns in gedrängter und doch übersichtlicher Weise mit den einschlagenden Arbeiten von Leonardo Fibonacci, von Cataldi, von Daniel Schwenter, von Brouncker und von Huyghens bekannt macht."

Zeitschrift für Mathematik und Physik, 17. Jahrgang.

Darstellung
der
Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form.
gr. 8°. 1873. geh. Preis 2 Mark 80 Pf.

„Die Schrift beginnt mit der Geschichte der Versuche, welche seit 1636 von den Mathematikern Schwenter, Wallis, Huyghens, Euler, Hindenburg, Lambert, Frisi, Dan. Bernoulli, Burckhardt, Rothe, Toepfer, Stern, Min'ding angestellt worden sind, die Näherungswerthe der Kettenbrüche in einer zur Rechnung geschickten Form darzustellen, welche jedoch nicht zu independenten Ausdrücken gelangten. Das erfolgreiche Mittel entdeckten dagegen Ramus und Heine, begnügten sich aber mit spezieller und vorübergehender Anwendung, ohne es theoretisch zu verwerthen. Der Verfasser ist demnach der Erste, welcher dessen allgemeine Bedeutung an's Licht gezogen und zu einer Theorie ausgebildet hat . . . . . "

Archiv d. Math. u. Phys. 55. Theil.

„Gelegentlich eines Schriftchens von Bauer haben wir in diesem Blatte schon darauf hingewiesen, dass der Ausdruck der Partialbrüche eines Kettenbruches in Determinantenform von grosser Brauchbarkeit für die Theorie der Kettenbrüche sein müsse. Die vorliegende Schrift bestätigt diess in vollem Masse, indem in ihr gezeigt wird, dass nur auf dieser Grundlage die independente Darstellung der Näherungswerthe vollständig und befriedigend ausgeführt werden kann . . . . . Aus dieser Uebersicht des Inhaltes wird man erkennen, welch' grosse Zweckmässigkeit der vom Verf. zuerst ausführlicher betrachteten Darstellung der Partialbrüche vermittelst Determinanten eigen ist und wie es allein hiedurch ihm möglich wurde, ein so bedeutendes Material auf dem kleinen Raume von kaum neun Druckbogen erschöpfend darzustellen."

Literarisches Centralblatt, Januar 1874.

Verlagsbuchhandlung von Eduard Besold in Erlangen.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

$$a_1 b_2 c_3 d_4 = - a_1 d_2 c_3 b_4$$
$$= a_1 d_2 d_3 b_4$$
$$= - a_1 c_2 b_3 d_4$$
$$= + a_1 b_2 c_3 d_4$$

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Günther, Siegmund,

Lehrbuch der Determinanten-Theorie Für Studirende

Erlangen 1875

Math.p. 193 t
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11318362-1